

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

33. Band, Heft 6/7

16. Mai 1950

S. 241—336

## Geschichte.

Neugebauer, O.: *Mathematical methods in ancient astronomy*. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1013—1041 (1948).

Eine wundervolle Zusammenfassung der in der griechischen und babylonischen Astronomie verwendeten Methoden. Die Schwierigkeit der Messung eines Winkels und die, mittels Eklipsen, einfache Konstatierung der Gleichheit zweier Winkel ermöglicht sowohl den Babyloniern als auch den Griechen nur eine Analyse der periodischen Erscheinungen. Babylonische Astronomie kommt auf eine rein mathematische Analyse der empirischen Daten mit Hilfe linearer Zickzackfunktionen heraus; griechische Astronomie ist eine (dynamische) Modelltheorie. Verf. zeigt diese Methoden in einer kurzen Darstellung der Mondtheorie und mit der Besprechung des Analemmas, des Planisphaeriums und der Kartierungsmethoden. *E. M. Bruins*.

\* Montel, Paul: *Sur la grande pyramide de Guizeh*. Bull. Sci. math., II. S. **71**, 76—81 (1947).

Verf. stellt die bekannten Beziehungen, die in den Dimensionen der Pyramide von Giseh aufgefunden sind, wie *sectio aurea*, die Zahlen  $\pi$ ,  $e$ , und andere zusammen und zeigt, daß diese alle folgen aus der von Herodot überlieferten Beziehung: „die Seitenfläche ist dem Quadrate der Höhe gleich“, innerhalb der experimentellen Fehler. Er konkludiert „gegen die Zahlenmystik“. *E. M. Bruins* (Amsterdam).

Millas-Vallierosa, J. M.: *Les sources de l'oeuvre astronomique de R. Abraham Bar-Hiyya de Barcelone*. Arch. internat. Hist. Sci., Paris **28**, 855—863 (1949).

Im Zusammenhang mit einer geplanten spanischen Übersetzung geht Verf. den Tendenzen und Vorlagen des Abraham (1070?/1136?) bei Abfassung der 3 zusammengehörigen Schriften *Šuratha-areš* = *forma terrae*, *sefer hešbon mahleket ha-kokabim* = *motus stellarum* und *Luhot* = *tabulae astronomicae* nach. Abraham ist wohl kein beobachtender Astronom, aber genauer Kenner der einschlägigen arabischen Werke, die er den gelehrten südfranzösischen Juden und Christen zugänglich machen will. Im Aufbau lehnt er sich stark an al-Fargānī († um 840) an, den er (ohne Namensnennung) exzerpiert und gelegentlich wörtlich übersetzt. Bei Berechnungen folgt er der *Motus stellarum* des al-Battānī (850?/929), deren von ihm stammende hebräische Übersetzung um 1120 von Plato v. Tivoli lateinisch gewendet wurde. Hinsichtlich der Präzession und der damit zusammenhängenden Tafeln zieht er jedoch den Ptolemäischen Wert (1°/100 Jahre) dem von al-Battānī (1,5°; heute: 1,39°) vor. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Stephanides, Michael: *Tables chronologiques d'histoire des sciences du XVI<sup>e</sup> siècle pour ce qui regarde le monde grec*. Arch. internat. Hist. Sci., Paris **28**, 1144—1150 (1949).

Phalen, H. R.: *Hugh Jones and octave computation*. Amer. math. Monthly **56**, 461—465 (1949).

Rev. H. Jones (1692—1760) wurde 1716 am Oxforder Jesus College zum Magister artium promoviert und 1717 als Nachfolger von Rev. T. Lefevre Professor für Mathematik, Naturphilosophie und später für Geschichte am College William and Marie (Virginia). Er ist Verf. des Ms. Brit. Mus. add. 21.893 (40 S.) über Aufbau und praktische Bedeutung des Positionssystems mit der Grundzahl 8, das dem Ear of Macclesfield gewidmet ist. Ein kurzer Auszug daraus wurde in Gentleman's Magazine für März 1751 abgedruckt. — Ref. hält es für möglich, daß H. Jones



mit dem wohlbekannten W. Jones (1675—1749) verwandt ist, der längere Zeit Sekretär der Royal Society war und seine letzten Jahre auf den Gütern des Earl of Macclesfield verbrachte. *Hofmann* (Tübingen).

**Coolidge, J. L.:** The story of the binomial theorem. *Amer. math. Monthly* 56, 147—157 (1949).

Verf. stellt die Entwicklung des Binomialtheorems dar, anfangend mit Euklid, unter besonderer Berücksichtigung des Anteils von Gregory und Newton, schließend mit Abel. Ich möchte folgendes bemerken: 1. Verf. sieht als erste Andeutung des Theorems Euklids Quadrierung einer Summe zweier Längen usw. Dieses Theorem wurde aber jedenfalls Jahrhunderte früher schon verwendet; dasselbe gilt für „Herons Formel“ für die Quadratwurzeln. 2. Verf. zitiert die Aussage von Heath, daß für Kubikwurzeln uns keine einzige Methode in den uns restierenden griechischen Schriften erhalten ist, aber heutzutage haben wir eine in Herons *Metrica* III, 20. 3. Die lateinische Übersetzung von Eutocius griechischen Kommentaren wird zitiert. Verf. wird für seine Darstellung vielleicht einen Grund haben, aber dieser tritt aus seinem Artikel m. E. nicht hervor; er könnte dadurch leicht mißverstanden werden. *E. M. Bruins* (Amsterdam).

**Struik, Dirk J.:** A selected list of mathematical books and articles published after 1200 and translated into English. *Scripta math.*, New York 15, 115—131 (1949).

**Hasse, Helmut:** Kurt Hensel zum Gedächtnis. *J. reine angew. Math.* 187, 1—13 (1949).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

**Mikami, Yoshio:** Mamoru Mimori, a Japanese master of mathematics. *Arch. internat. Hist. Sci.*, Paris 28, 1140—1143 (1949).

**Meißner, Walther:** Gedenkrede auf Max Planck. *S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* 1948, 1—20 (1949).

**Kořinek, Vladimír:** Rapport succinct sur les travaux scientifiques du Professeur Karel Petr dans les années 1938—1948. *Časopis Mat. Fysiky, Praha* 73, D 9—D 18 (1948) [Tschechisch].

**Čech, Eduard:** Das wissenschaftliche Werk Bedrich Pospíšils. Mit Schriftenverzeichnis. *Časopis Mat. Fysiky, Praha* 72, D1—D9 (1947) [Tschechisch].

**Crespo Pereira, Ramón:** Alfred North Whitehead. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. 9, 49—52 (1949) [Spanisch].

## Philosophie. Logik.

● **Weyl, H.:** *Philosophy of mathematics and natural science*. Revised and augmented English edition based on a translation by Olaf Helmer. Princeton University Press 1949. X, 311 p. \$ 5.00.

**Dingle, Herbert:** The nature of scientific philosophy. *Proc. R. Soc. Edinburgh A* 62, 400—411 (1948).

**Vaccarino, Giuseppe:** Elementi per una teoria della conoscenza. *Sigma, Roma* 1, 6—27, 69—86, 215—233; 2, 303—331, 387—433 (1947/48).

Die neo-positivistische Auffassung der Erkenntnistheorie (Wiener Kreis, insbesondere Carnap) wird grundsätzlich angenommen, doch wird ihre Begründung als ungenügend anerkannt, so lange nichts außer den eigenen formalistischen Entwicklungen mitbetrachtet wird. Dieses auch z. B. von Gonseth betonte Erfordernis wird hier aber scharf begrenzt: die „Metaerkenntnis“ soll streng vor jeder inhaltlichen und daher metaphysischen Spur bewahrt werden (sonst käme man zu unzulässigen „Pseudoapodixien“); man braucht nur ein solipsistisch-methodologisch gedachtes „Metabewußtsein“ einzuführen (so stellt man zulässige „Apodixien“). — Die darauffolgenden Bearbeitungen, betreffend Strukturmodelle, Protokolle und Schemen, dienen wohl versuchsweise der Aufklärung dieses Programms, auch in



Beziehung zu den Ideen anderer Verfasser; sie bilden aber keine eindeutige oder endgültige Verwirklichung desselben, wie auch aus späteren Abhandlungen des Verf. zu entnehmen ist. *Bruno de Finetti* (Trieste).

**Halldén, Sören:** Certain problems connected with the definitions of identity and of definite descriptions given in *Principia mathematica*. *Analysis*, Oxford 9, 29—33 (1948).

**Baylis, C. A.:** Facts, propositions, exemplification and truth. *Mind*, II. S. 57, 459—479 (1948).

**May, Eduard:** Induktion und Exhaustion. *Methodos*, Milano 1, 137—149 und engl. Übersetzung 150—156 (1949).

**Nelson, David:** Constructible falsity. *J. symbolic Logic* 14, 16—26 (1949).

Nach der Methode von Kleene [*J. symbolic Logic* 10, 109—124 (1945)] und dem Verf. werden mit Hilfe rekursiver Funktionen die Aussagen „ $a$   $P$ -realisiert  $A$ “, „ $a$   $N$ -realisiert  $A$ “ ( $a, b, \dots$  Zahlen,  $A, B, \dots$  arithmetische Formeln) definiert. „ $a$   $N$ -realisiert  $A$ “ ist äquivalent mit „ $a$   $P$ -realisiert  $\neg A$ “. Die Formeln  $\neg \neg A \equiv A$ ,  $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$ ,  $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$  sind  $P$ -realisierbar. Wird in der Formel  $A$  jeder Teil  $\neg B$  durch  $B \supset 1 = 0$  ersetzt, so ist die  $P$ -Realisierbarkeit äquivalent mit der Realisierbarkeit von  $A$  im Kleeneschen Sinne. — Es wird ein Formalismus  $N$  konstruiert, dessen ableitbare Formeln sämtlich  $P$ -realisierbar sind. Die Existenz gewisser unentscheidbarer Aussagen beweist dann die Unableitbarkeit solcher Formeln wie  $A \vee \neg A$ ,  $\neg(A \wedge \neg A)$ ,  $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$  in  $N$ .

*Lorenzen* (Bonn).

**Vaccarino, Giuseppe:** La scuola polacca di logica. *Sigma*, Roma 2, 527—546 (1948).

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines. Kombinatorik:

**Newing, R. A.:** On the multiplication of complex numbers. *Math. Gaz.*, London 33, 177—179 (1949).

**Freedman, Benedict:** The four number game. *Scripta math.*, New York 14, 35—47 (1948).

Zu vier positiven ganzen Zahlen  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bilde man die neue Reihe  $a'_1 = |a_1 - a_2|$ ,  $a'_2 = |a_2 - a_3|$ ,  $a'_3 = |a_3 - a_4|$ ,  $a'_4 = |a_4 - a_1|$ , unterwerfe sie derselben Operation und fahre so fort. Dann gibt es, wie Verf. zeigt, stets ein  $n$ , für welches erstmalig  $a_1^{(n)} = a_2^{(n)} = a_3^{(n)} = a_4^{(n)} = 0$  wird, und die Menge der  $n$  ist nach oben nicht beschränkt. Dasselbe gilt mit  $k$  ( $> 1$ ) statt vier Zahlen, wenn  $k$  eine Potenz von 2 ist; für andere Werte von  $k$  existiert  $n$  im allgemeinen nicht. *Sprague* (Berlin).

### Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

**Richter, H.:** Ein einfacher Beweis der Newtonschen und der Waring'schen Formel für die Potenzsummen. *Arch. Mat.*, Karlsruhe 2, 1—4 (1949/50).

Verf. führt die Funktionen  $f(t) = \sum_{v=0}^n a_v t^v$  und  $g(t) = \sum_{v=0}^{\infty} s_v t^v$  ein, wobei  $a_0 = 1$  und  $(-1)^v a_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) die elementar-symmetrischen Funktionen und  $s_v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) die Potenzsummen der  $n$  Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  eines normierten Polynoms in  $t$  sind. Aus diesem Grunde kann (1)  $f(t) = t^n \prod_{\mu=1}^n (1/t - \lambda_\mu)$  und  $g(t) = 1/t \sum_{\mu=1}^n 1/(1/t - \lambda_\mu)$  geschrieben werden. Setzt man in der daraus



unmittelbar folgenden Relation (2)  $g(t) = n - t f'(t)/f(t)$ , so erhält man wegen  $a_0 = 1$  und  $s_0 = n$

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} s_\nu t^\nu + \sum_1^n a_\nu t^\nu \cdot \sum_1^{\infty} s_\nu t^\nu + \sum_1^n \nu a_\nu t^\nu = 0,$$

woraus durch Koeffizientenvergleich die Newtonsche Rekursionsformel gewonnen wird. — Die wegen  $f(0) = 1$  für kleine  $t$  konvergente Reihe von  $\ln f(t)$  liefert  $-t f'(t)/f(t)$  als Potenzreihe, die wegen (2) mit  $-n + g(t)$  identisch sein muß. Vergleichen der Koeffizienten von  $t^m$  bei  $m \geq 1$  liefert die Waringsche Formel. — Verf. zeigt weiter, daß die gemachten Ausführungen ohne Verwendung unendlicher Potenzreihen rein algebraisch formuliert werden können, indem zunächst der Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion der Unbestimmten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  zu einem Körper  $K$  erweitert wird, über den nun rationale Funktionen von  $t$  gebildet werden.  $g(t)$  wird jetzt durch die zweite Gleichung (1) definiert und (2) bleibt gültig, da die Differentiation von Polynomen als rein algebraische Operation betrachtet werden kann. Setzt man  $g(t) = \sum_{\mu=1}^n \left( \sum_{\nu=0}^M \lambda_\mu^\nu t^\nu \right) / (1 - \lambda_\mu^{M+1} t^{M+1})$  (eine für jede natürliche

Zahl  $M \geq 1$  gültige Identität) und multipliziert (2) mit  $f(t) \prod_{\mu=1}^n (1 - \lambda_\mu^{M+1} t^{M+1})$ , so entsteht wieder (3), wenn die Gleichheit durch eine Kongruenz mod  $t^{M+1}$  ersetzt wird. — Auf ähnlichem Wege wird die Waringsche Formel gewonnen. Schließlich verwendet Verf. die Gleichung (2) zur Gewinnung der Umkehrung der Waringschen Formel.  
G. Kantz (Graz).

Vinograd, B.: An application of Newton's power-sum formulas. Amer. math. Monthly 56, 377—379 (1949).

Seien  $f$  und  $g$  zwei Operatoren, definiert durch gleichgradige Polynome mit reellen Koeffizienten  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$  und  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$  ( $n > 1$ ) und  $fg$  der durch die Substitution  $f(g(x))$  erklärte Polynomoperator. Dann lautet der behauptete Satz: Es ist im allgemeinen  $fg = gf$  dann und nur dann, wenn  $f = g$  ist. Nur wenn  $f(x)$  die Gestalt

$$a_0(x-c)^{2k+1} + c_1(x-c)^{2k-1} + \dots + c_{2k}(x-c) + c$$

hat, kann außerdem  $g(x) = -f(x) + 2c$  gesetzt werden, wenn  $n = 2k + 1$  ist. — Verf. beweist den Satz, indem er von der aus  $fg = gf$  notwendigerweise folgenden Be-

dingung  $a_0 \prod_{i=1}^n (g(x) - r_i) = b_0 \prod_{i=1}^n (f(x) - s_i)$ , wo  $r_i$  bzw.  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die Wurzeln von  $f(x)$  bzw.  $g(x)$  sind, auf die Verteilung der Wurzeln von  $f(g(x))$  auf die Faktoren  $g(x) - r_i$  einerseits und auf die Faktoren  $f(x) - s_i$  andererseits hinweist und so die Potenzsummen  $S_i$  der Wurzeln von  $f(g(x))$  mit Hilfe der Newtonschen Formeln auf zweifache Weise ausdrückt. So erhält man Relationen zwischen den  $a_i$  und  $b_i$ , welche die Behauptung des Satzes beinhalten. — Es folgt daraus unmittelbar ein weiterer Satz: Eine Menge  $F$  von gegenseitig vertauschbaren reellen Polynomoperatoren, welche für jeden Grad mindestens einen Operator enthält, enthält genau einen Operator von jedem Grad. — Daraus ergibt sich ein weiterer Folgesatz: Enthält eine Menge  $F_0$  von reellen, untereinander vertauschbaren Polynomoperatoren mindestens einen Operator geraden Grades, so enthält die Menge  $F_0$  für jeden in ihr vorkommenden Grad genau einen Operator.  
G. Kantz (Graz).

Tomić, Miodrag: Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 146—154 u. serb. Zusammenfassg. 155—156 (1948).

Sind  $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $z_{\nu+1} = \sum_{k=0}^{\nu} a_k e^{ik\Theta}$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ),  $0 < \Theta < 2\pi$  und bezeichnet  $K_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) den Kreis durch die Punkte, von denen aus der Vektor  $\overrightarrow{z_\nu z_{\nu+1}}$  unter dem Winkel  $\Theta/2$  erscheint, so liegt der Kreis  $K_\nu$  im Kreis  $K_{\nu-1}$ , wenn er mit  $K_{\nu-1}$  nicht zusammenfällt. Keiner der Punkte  $z_\nu, z_{\nu+1}, z_{\nu+2}, \dots$  liegt außerhalb von  $K_\nu$ . Der Kreis  $K_0$  durch den Punkt  $z_0$ , dessen



Tangente zur reellen Achse den Winkel  $-\Theta/2$  bildet, enthält die Punkte  $z_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) im Innern oder auf dem Rand. — Dieses elementargeometrische Lemma läßt sich leicht einsehen. Die Kreise  $K_\nu$  und  $K_{\nu-1}$  haben nämlich im Punkt  $z_\nu$  eine gemeinsame Tangente  $g$ , sie liegen auf derselben Seite von  $g$  und ihre Halbmesser  $r_\nu$  und  $r_{\nu-1}$  genügen der Ungleichung

$$r_\nu = \frac{a_\nu}{2 \sin \Theta/2} \leq \frac{a_{\nu-1}}{2 \sin \Theta/2} = r_{\nu-1}.$$

Setzt man  $z = \varrho e^{i\Theta}$ ,  $a_\nu = b_\nu \varrho^\nu$  und  $0 < \varrho < 1$  bzw.  $\varrho = 1$ , so erhält man leicht den Eneströmschen Satz und seine Ergänzung: Das Polynom  $p_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ ,

$b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_n > 0$ , hat im Kreis  $|z| < 1$  keine Nullstelle und auf dem Kreis  $|z| = 1$  nur dann eine Nullstelle, wenn die Gleichung  $b_\nu = b_{\nu+1}$  für jeden Index  $\nu$  besteht, der durch einen gewissen Teiler  $t$  von  $n-1$  unteilbar ist. Dann hat  $p_n(z)$  auf den Kreis  $|z| = 1$   $(n-1)/t$  Nullstellen. — Auf ähnliche Weise läßt sich der Satz

beweisen: Hat das Polynom  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$  reelle Koeffizienten, ist  $m = [n/2]$  ( $c_{2m+1} = 0$  im Falle  $n = 2m$ ) und bestehen die Ungleichungen

$$c_{m-k+1} - c_{m+k} \geq c_{m-k} - c_{m+1+k} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

so hat  $P_n(z)$  im Falle  $P_n(1) \neq 0$  auf den Kreis  $|z| = 1$  keine Nullstelle. Sind aber  $P_n(1) = 0$  und  $c_m \geq c_{m-1} \geq \dots \geq c_1 > c_0 > 0$ , so hat  $P_n(z)$  auf dem Kreis  $|z| = 1$   $m$  Nullstellen. Hieraus lassen die Sätze von L. Fejér ableiten: Das trigono-

metrische Polynom  $S_m(\Theta) = \sum_{k=1}^m d_m \sin(k+1/2)\Theta$  bzw.  $C_m(\Theta) = e_0/2 + \sum_{k=1}^m e_k \cos k\Theta$  ist im Intervall  $(0, 2\pi)$  positiv, falls die Folge  $d_1, d_2, \dots, d_m$  bzw.  $e_0, e_1, \dots, e_m, 0, 0$  monoton bzw. konvex ist.

Gy. Sz.-Nagy (Szeged).

**Marden, Morris:** On the zeros of rational functions having prescribed poles, with applications to the derivative of an entire function of finite genre. Trans. Amer. math. Soc. 66, 407—418 (1949).

Ist  $A$  eine beliebige Zahl, sind  $m_1, m_2, \dots, m_n$  positive ganze Zahlen und liegen die Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_n$  in einem Kreis vom Halbmesser  $r$ , so besitzt die rationale

Funktion  $F(z) = A + \sum_{k=1}^n m_k/(z - z_k)$  nach Biernacki und Dieudonné in dem

konzentrischen Kreis vom Halbmesser  $r/\sqrt{2}$  mindestens  $n-1$  Nullstellen. Dieser Satz gilt nach dem Ref. auch dann, wenn die Zahlen  $m_k$  beliebige positive Zahlen bedeuten. Dieser Satz wird hier auf folgende Weise verallgemeinert: Hat die rationale Funktion  $F(z)$  die Form

$$F(z) = \sum_{h=0}^{p-1} A_h z^h + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - z_k}, \quad f(z) = \prod_{k=1}^h (z - z_k), \quad P(z) = \sum_{h=1}^{p-1} A_h z^h,$$

wo die Koeffizienten  $A_h$  bzw.  $m_k$  beliebige bzw. den Ungleichungen

$$\alpha \leq \arg m_k \leq \alpha + \mu < \alpha + \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

genügende komplexe Zahlen bedeuten, so besitzt die Funktion  $F(z)$  außerhalb des Bereiches  $S(H, \psi)$ , von dessen Punkten aus die konvexe Hülle  $H$  der Nullstellen von  $f(z)$  unter Winkeln  $\geq \psi = (\pi - \mu)/(p+1)$  erscheint, höchstens  $p$  Nullstellen [die einzelnen Nullstellen von  $F(z)$  nach ihren Vielfachheiten gerechnet]. Das Polynom  $Q(z) = P(z)f(z) + f'(z)$  hat also außerhalb des Bereiches  $S_1 = S(H, \pi/(p+1))$  höchstens  $p$  Nullstellen. Besitzt  $Q(z)$  im Innern von  $S_1$  höchstens  $n-2$  solche Nullstellen, die keine Nullstellen von  $f(z)$  sind, so liegt keine Nullstelle von  $Q(z)$  außerhalb von  $S$ . — Der Satz über die Nullstellen von  $F(z)$  wird auf meromorphe Funktionen und auch auf die Lage der Nullstellen der



Derivierten gewisser ganzer Funktionen vom Geschlecht  $p$  verallgemeinert. Ein allgemeinerer Satz dieser Arbeit enthält den bekannten Laguerre-Borelschen Satz über die Nullstellen der Derivierten einer reellen ganzen Funktion vom Geschlecht  $p$  als speziellen Fall in sich. *Gyula Sz.-Nagy (Szeged).*

**Zahorski, Zygmunt:** On a problem of M. F. Leja. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **20**, 215—222 (1948).

Verf. zeigt an einem Beispiel, daß folgendes Problem von F. Leja [*Ann. Soc. Polonaise Math.* **18**, 172 (1945) und *Interm. Rech. Math.* **2**, Fr. 0389 (1946)] negativ zu beantworten ist: Es sei  $C$  eine abgeschlossene Punktmenge in der komplexen Ebene und  $z_0 \in C$ ; der transfinite Durchmesser der Punktmenge  $C \cdot \{|z - z_0| \leq \delta\}$  sei positiv für  $\delta > 0$ .  $P_n(z)$  bedeute ein Polynom  $n$ -ten Grades für  $n = 1, 2, \dots$ , und es sei  $|P_n(z)| < M$  für  $z \in C$  und  $n = 1, 2, \dots$ . Gibt es für  $0 < \varepsilon < 1$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon)$ , für die  $|P_n(z)(1 - \varepsilon)^n| < M_1$  für  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$  und  $n = 1, 2, \dots$  mit festem  $M_1$  gilt? *Császár (Budapest).*

**Amante, S.:** Sul teorema di Amato relativo alle sostituzioni ortogonali periodiche di carattere assegnato. *Mat., Catania* **3**, 1—9 (1948).

**Amante, Salvatore:** Sulla validità nel corpo reale di un teorema di Amato relativo alle sostituzioni ortogonali periodiche di carattere assegnato. *Mat., Catania* **3**, 16—24 (1948).

Das im Titel genannte Theorem von V. Amato [*Atti Accad. Gioenia Sci. natur., Catania*, V. S. **7**, Nr. 23 (1914), **8**, Nr. 25 (1915)] besagt folgendes: Jede orthogonale Substitution  $S$  der (primitiven) Periode  $p$  in  $n$  Variablen, deren Koeffizienten dem Körper der komplexen Zahlen angehören, läßt sich in der Form  $A^{-1}\Phi A$  darstellen. Dabei bedeutet  $A$  eine beliebige orthogonale Substitution in  $n$  Variablen, während die Matrix der kanonischen reellen Substitution  $\Phi$  in einfacher Weise angeschrieben werden kann, sobald man weiß, wie oft jede einzelne  $p$ -te Einheitswurzel als Wurzel der charakteristischen Gleichung von  $S$  auftritt. — In der ersten Abhandlung bestimmt Verf. die Anzahl der nichtäquivalenten  $S$  für ungerades und für gerades  $p$ . In der zweiten beweist er, daß das Theorem von Amato auch im Körper der reellen Zahlen gilt. *Schönhardt (Stuttgart).*

**Riguet, Jacques:** Préliminaires logiques pour une théorie générale des invariants. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 409—411 (1949).

Verf. verallgemeinert die Galoissche Theorie mit Hilfe seiner binären Relationslogik [dies. Zbl. **33**, 6; vgl. auch M. Krasner, *J. Math. pur. appl.*, IX. S. **17**, 367—385 (1938); dies. Zbl. **20**, 200]. Ist  $D$  die Potenzmenge der Menge der Abbildungen einer Menge  $U$  in eine Menge  $E$  (deren Kardinalzahl nicht größer als die von  $U$  sei), so liefert jede Permutation von  $E$  eine Permutation  $\sigma$  von  $D$ .  $G_0$  sei die Gruppe dieser  $\sigma$ . Für  $R \subset D$  sei  $\mathfrak{A}[R]$  die Untergruppe der  $\sigma$  mit  $\sigma r = r$  ( $r \in R$ ). Für  $G \subset G_0$  sei  $\mathfrak{A}^{-1}[G]$  die Menge der  $r$  mit  $\sigma r = r$  ( $\sigma \in G$ ). Für Gruppen  $G$  gilt dann  $G = \mathfrak{A}[\mathfrak{A}^{-1}[G]]$ . Für jedes  $R$  läßt sich außerdem  $\hat{R} = \mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{A}[R]]$  ohne Benutzung von  $G_0$  definieren. Diese Definition führt in algebraischen Spezialisierungen auf Pseudo-Tensoren. *Lorenzen (Bonn).*

### Gruppentheorie:

**Ma'cev, A. I.:** Über unendliche auflösbare Gruppen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **67**, 23—25 (1949) [Russisch].

Eine unendliche Gruppe wird auflösbar genannt, wenn sie eine endliche Normalreihe mit abelschen Faktorgruppen besitzt. Über diese Faktorgruppen werden in der vorliegenden Arbeit noch weitere Annahmen gemacht. Eine abelsche Gruppe heißt vom Typ  $A_1$ , wenn die Faktorgruppe nach der Untergruppe ihrer Elemente endlicher Ordnung (periodische Untergruppe) endlichen Rang hat. Ist überdies die periodische Untergruppe direktes Produkt einer endlichen Anzahl zyklischer oder



primärer lokal-zyklischer Gruppen, so heißt die Gruppe vom Typ  $A_3$ . Eine abelsche Gruppe vom Typ  $A_1$ , deren periodische Untergruppe endlich ist, heißt vom Typ  $A_4$ . Schließlich werden noch abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden betrachtet: Typ  $A_5$ . Sind alle Faktorgruppen einer Normalreihe einer auflösbaren Gruppe  $\mathcal{G}$  von einem Typ  $A_i$ , so wird  $\mathcal{G}$  selbst vom Typ  $A_i$  genannt. Es werden Sätze folgender Art bewiesen: Die Faktorgruppe einer auflösbaren  $A_1$ -Gruppe nach ihrem maximalen periodischen Normalteiler ist eine auflösbare Gruppe mit einer Kette von Normalteilern, deren Faktorgruppen vom Typ  $A_4$  sind. Wenn jede abelsche Untergruppe einer beliebigen Gruppe  $\mathcal{G}$  vom Typ  $A_3$  ist, besitzt  $\mathcal{G}$  einen maximalen nilpotenten Normalteiler. Wenn jede auflösbare Untergruppe der Gruppe  $\mathcal{G}$  vom Typ  $A_3$  ist, besitzt  $\mathcal{G}$  einen maximalen auflösbaren Normalteiler. Ist jede abelsche Untergruppe einer auflösbaren Gruppe  $\mathcal{G}$  vom Typ  $A_5$ , so ist  $\mathcal{G}$  selbst vom Typ  $A_5$ . Die periodischen Untergruppen einer auflösbaren Gruppe vom Typ  $A_4$  zerfallen in eine endliche Anzahl von Klassen konjugierter. *R. Kochendörffer* (Greifswald).

**Čarin, V. S.: Über volle Gruppen mit Wurzelreihen endlicher Länge.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 809—811 (1949) [Russisch].

Neben einigen Bemerkungen über die Struktur der Multiplikationsgruppe eines endlich-algebraischen Zahlkörpers und gewisser Gruppen von Matrizen über dem rationalen Zahlkörper wird folgender Satz bewiesen: Sei  $\mathcal{G}$  eine Gruppe mit endlicher Wurzelreihe, d. h.  $\mathcal{G}_0 = E \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \dots \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$ , wobei  $\mathcal{G}_k$  Normalteiler in  $\mathcal{G}_{k+1}$ ,  $\mathcal{G}_{k+1}/\mathcal{G}_k$  isomorph entweder der additiven Gruppe der rationalen Zahlen oder einer Gruppe vom Typ  $p^\infty$ . Dann besitzt  $\mathcal{G}$  eine aufsteigende Zentralreihe endlicher Länge. *R. Kochendörffer* (Greifswald).

**Samelson, Hans: Sur les sous-groupes de dimension 3 des groupes de Lie compacts.** C. r. Acad. Sci., Paris 228, 630—631 (1949).

Mit Hilfe einfacher, der klassischen Lieschen Theorie entnommener Überlegungen wird das folgende Theorem bewiesen: Ist  $G$  eine kompakte Liesche Gruppe und  $Q$  eine ebenfalls kompakte, nicht-abelsche Untergruppe von  $G$  von der Dimension 3, dann ist innerhalb von  $G$  die Untergruppe nicht homolog zu 0. Vorstehender Satz wurde schon früher von J. L. Koszul (dies. Zbl. 31, 284) mit den von E. Cartan entwickelten Methoden bewiesen. *Hardtwig* (München).

## Verbände. Ringe:

**Peremans, W.: Abstrakte algebraische Systeme.** Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 003, 12 S. (1949) [Holländisch].

Bericht über einen Vortrag, der in die Gedankenwelt der abstraktesten Algebra einführt. Diese wird an Begriffen wie „universale Algebra“ und an dem Beweise des Jordan-Hölder-Schreier-Zassenhausschen Satzes für nicht-assoziative Gruppen [= loops] illustriert. *Reinhold Baer* (Urbana/Illinois).

**Dolcher, Mario: Nozione generale di struttura per un insieme.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 265—291 (1949).

L'A. rappelle d'abord (§ 1) certaines structures classiques dans un ensemble: structure d'ensemble ordonné, de treillis, structure algébrique, structure d'équivalence, structure topologique etc. Il montre ensuite (§ 2) l'insuffisance du critère d'isomorphisme habituel des structures pour l'équivalence de deux définitions possibles d'un treillis, de la droite topologique, ou d'un espace linéaire. Il propose alors (§ 3) de remplacer la définition d'une structure basée sur la notion d'espèce [N. Bourbaki, Théorie des ensembles I., Fasc. de résultats (Actual. sci. industr. Nr. 846, Paris 1939, p. 41—45; ce Zbl. 26,389] par une notion plus générale précisée dans 3 définitions, I. définition de deux systèmes équivalents  $S_1$  et  $S_2$  de relations dans un même ensemble, II. définition de l'isomorphisme de deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  pour deux systèmes de relations données  $S_1$  et  $S_2$ , III. définition d'une structure



(pour  $n$  éléments) par une classe de sous-groupes invariante par tout automorphisme intérieur du groupe symétrique  $(n!)$ . Le § 4 étudie les structures possibles dans les ensembles à 1, 2, 3 ou 4 éléments, et le § 5 certains problèmes de la théorie des structures.

*L. Lesieur* (Poitiers).  
**Dieudonné, Jean:** Sur les produits tensoriels. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 101—117 (1947).

Von H. Whitney [Duke Math. J. 4, 495—528 (1938); dies. Zbl. 19, 398] stammt die Definition des Tensorproduktes  $E \otimes F$  von zwei Moduln  $E, F$  über demselben kommutativen Ring  $A$ . Ein Element  $x$  heißt frei, wenn es nur durch den Nulloperator annulliert wird. Sind die Elemente  $x \in E, y \in F$  frei und ist  $\lambda \in A$  nicht nilpotent, so gilt die Relation  $\lambda(x \otimes y) \neq 0$  für  $x \otimes y \in E \otimes F$ . Ein Gegenbeispiel wird gegeben, daß dies i. a. nicht mehr gilt, wenn  $\lambda$  nilpotent ist. Verf. betrachtet das Tensorprodukt  $M \otimes N$  von zwei Untermoduln  $M, N$  von  $E$  bzw.  $F$ , und zeigt, daß die Abbildung  $x \otimes y \rightarrow x \otimes y$  ( $x \in M, y \in N$ ) von  $M \otimes N$  in  $E \otimes F$  nicht immer ein Isomorphismus ist. Ist aber  $A$  ein Dedekindscher Ring (d. h. bilden die vom Nullideal verschiedenen Ideale von  $A$  eine multiplikative Gruppe) und ist jedes Element  $\neq 0$  der beiden Moduln  $E, F$  frei, so ist die obige Abbildung ein Isomorphismus und sind auch alle Elemente  $\neq 0$  von  $E \otimes F$  frei. Zum Schluß beweist Verf. einige Sätze über den Annullator eines Elementes  $x \otimes y$  von  $E \otimes F$ , wo  $E$  und  $F$  beliebige Moduln über demselben Dedekindschen Ring sind. *Fuchs*.

**Nakayama, Tadasu:** Commuter systems in a ring with radical. Duke math. J. 16, 331—337 (1949).

Es sei  $R$  ein Ring mit Minimalbedingung und Einselement 1. Verf. nennt einen  $R$ -Rechtsmodul  $M$  regulär, wenn es solche natürliche Zahlen  $u, v$  gibt, daß die direkte Summe von  $v$  Exemplaren von  $M$  zur direkten Summe von  $u$  Exemplaren des  $R$ -Rechtsmoduls  $R$   $R$ -isomorph ist. (Die eindeutig bestimmte Zahl  $u/v$  heißt der Rang von  $M$ .)  $K_r(K_l)$  bezeichnet den Unterring von Rechts-(Links-)Multiplikation mit Elementen aus  $K$  des absoluten Endomorphismenrings des Ringes  $K$ , und  $V_K(L)$  bezeichnet den Kommutator von  $L$  in  $K$ . Nun sei  $K$  ein 1 enthaltender Unterring von  $R$  mit den Eigenschaften: a)  $R_r K_l \cap K_l = K_l$ ; b)  $R$  ist  $R_r K_l$ -rechtsregulär. Dann gilt  $V_R(V_R(K)) = K$ . Genügt außerdem der Ring  $R$  der Bedingung (\*): jeder Ring zwischen  $R_r K_l$  und  $R_r$ , für welchen  $R$  regulär ist, kann in der Gestalt  $R_r L_l$  mit  $L \subseteq K$  und  $R_r L_l \cap K_l = L_l$  dargestellt werden, dann hat man den Satz: die Unterringe  $L, T$  von  $K, R$ , wo  $R$   $R_r L_l$ -regulär ist,  $R_r L_l \cap K_l = L_l$ ,  $R$   $T$ -linksregulär ist und  $T \supset V_R(K)$ , entsprechen einander eineindeutig; die Zuordnung ist durch  $V_K(T) = L, V_R(L) = T$  gegeben. (\*) ist erfüllt, wenn  $K$  das Zentrum von  $R$  enthält und  $R_r K_l$  eine unabhängige Basis über  $R_r$  hat. *Fuchs*.

**Chatland, Harold and H. B. Mann:** Integral extensions of a ring. Bull. Amer. math. Soc. 55, 592—594 (1949).

Man nennt die Elemente  $a, b$  teilerfremd in einem kommutativen Ring  $R$  mit Einselement, wenn jeder ihrer gemeinsamen Teiler in  $R$  eine Einheit ist. Ein Ober- $R$ -ring  $R'$  von  $R$  heißt eine ganze Erweiterung von  $R$ , wenn aus  $a = br$  ( $a, b \in R, r \in R'$ ) die Existenz eines Elementes  $\bar{r} \in R$  folgt, für welches  $a = b\bar{r}$  ist. Verff. beweisen, daß  $a, b \in R$  dann und nur dann in jeder ganzen Erweiterung von  $R$  teilerfremd sind, wenn  $ax + by = 1$  für geeignete Elemente  $x, y \in R$  gilt. Außerdem wird bewiesen, daß es zu jeder Menge der Ideale des Ringes  $R$  eine ganze Erweiterung  $R'$  gibt, mit der Eigenschaft, daß jedes einzelne Ideal dieser Menge gleich dem Durchschnitt von  $R$  mit einem Hauptideal von  $R'$  ist. Der analoge Satz in der algebraischen Zahlentheorie ist wohlbekannt. *Fuchs* (Budapest).

### Funktionenkörper:

**Ankeny, N. C. and S. Chowla:** The class number of the cyclotomic field. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 529—532 (1949).



Sei  $l$  eine ungerade Primzahl und  $h_l^*$  der Kummersche erste Klassenzahlfaktor für den Körper  $P_l$  der  $l$ -ten Einheitswurzeln (Quotient der Klassenzahlen von  $P_l$  und des größten reellen Teilkörpers  $P_l^{(0)}$ ). Kummer vermutete die asymptotische Gleichheit:

$$(1) \quad h_l^* \sim \frac{l^{(l+3)/4}}{2^{(l-3)/2} \pi^{(l-1)/2}} = 2l \left( \frac{\sqrt{l}}{2\pi} \right)^{(l-1)/2} = L \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Ein Beweis dieser Vermutung ist bis heute unbekannt. Verff. beweisen hier, daß jedenfalls gilt

$$(2) \quad \log \frac{h_l^*}{L} = o(\log l) \quad \text{für } l \rightarrow \infty,$$

woraus insbesondere folgt, daß  $h_l^*$  mit  $l$  von einer Stelle  $l_0$  an monoton wächst. — Verff. zeigen ferner, daß aus der Richtigkeit von (1) die Beziehung

$$(3) \quad \sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{l}} \frac{\pm 1}{p} = O\left(\frac{1}{l}\right) \quad \text{für } l \rightarrow \infty$$

folgen würde, deren linke Seite in der bekannten Beziehung

$$\log L_l(s|\xi) \sim \frac{l-1}{2} \sum_{p \equiv \pm 1 \pmod{l}} \frac{\pm 1}{p^s} \quad \text{für } s \rightarrow 1$$

für die  $L$ -Funktion  $L_l(s|\xi) = \zeta_{P_l}(s)/\zeta_{P_l^{(0)}}(s) = \sum_{\chi(-1)=-1} L_l(s|\chi)$  zum erzeugenden Cha-

rakter  $\xi$  von  $P_l/P_l^{(0)}$  auftritt. Ein Beweis von (3) gelingt ihnen aber nicht einmal unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für die Dirichletschen  $L$ -Funktionen  $L(s|\chi)$  zu den Restklassencharakteren  $\chi \pmod{l}$ . — Verff. beweisen schließlich, daß es unter Annahme der Richtigkeit dieser Riemannschen Vermutung bei gegebenen  $\varepsilon > 0$  und  $\theta_1, \theta_2$  mit  $\frac{1}{2} < \theta_1 < s < \theta_2 < 1$  einen Restklassencharakter  $\chi \pmod{l}$  [mit  $\chi(-1) = -1$ ] derart gibt, daß  $|L_l(s|\chi)| < 1 + \varepsilon$  für alle  $l > l_0(\varepsilon, \theta_1, \theta_2)$  ist. Diese Aussage ist schärfer als eine kürzlich von Selberg [Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, Nr. 3 (1946)], allerdings ohne Annahme der Riemannschen Vermutung, bewiesene. — Die Beweise stützen sich auf Ergebnisse von Brun, Titchmarsh und Walfisz über die Abhängigkeit vom Modul in der asymptotischen Anzahlformel für die Primzahlen in primen Restklassen. *Hasse* (Berlin).

### Zahlentheorie:

Gloden, A.: Note on systems of diophantine equations. Scripta math., New York 15, 163—164 (1949).

Campbell, R. C.: A simple solution of the diophantine equation  $x^3 + y^3 = z^2 + t^2$ . Bull. Amer. math. Soc. 55, 442—446 (1949).

Durch Betrachtung der vollständigen multiplikativen Zerlegung beider Seiten der zu untersuchenden Gleichung im Körper  $K_0(i, \sqrt[3]{3})$  ( $K_0$  Körper der rationalen Zahlen) erhält Verf. eine vollständige Lösung derselben in rationalen Zahlen unter Verwendung von vier rationalen Parametern  $\lambda, p, q, r$ :

$$x = \lambda^2(p+r)(p+3r)(p^2+3r^2)(r^2+q^2), \quad y = 2\lambda^2 r(p+3r)(p^2+3r^2)(r^2+q^2), \\ z = \lambda^3 r(p+3r)^2(p^2+3r^2)^2(r^2+q^2), \quad t = \lambda^3 q(p+3r)^2(p^2+3r^2)^2(r^2+q^2).$$

G. Kantz (Graz).

Obláth, Richard: Note on the binomial coefficients. J. London math. Soc. 23, 252—253 (1949).

Erdős [J. London math. Soc. 14, 245—249 (1939); dies. Zbl. 26, 388] sprach die Vermutung aus, daß die Gleichung  $\binom{n}{k} = x^l$ ,  $1 < k \leq \frac{1}{2}n$ , für  $l > 2$  keine ganzzahlige Lösung besitzt, und bewies diese Vermutung für  $l = 3$ . Verf. beweist mit der Methode von Erdős (l. c.) die Vermutung für  $l = 4$  und 5. *H. L. Schmid*.



**Erdős, P.: On the converse of Fermat's theorem.** Amer. math. Monthly **56**, 623—624 (1949).

$n$  heißt eine Pseudoprimzahl, wenn  $2^n \equiv 2 \pmod{n}$  und  $n$  keine Primzahl ist. Sierpinski [Colloquium math. **1**, 9 (1947)] bewies die Existenz von unendlich vielen Pseudoprimzahlen, indem er zeigte, daß mit  $n$  auch  $2^n - 1$  eine Pseudoprimzahl ist. Lehmer [Amer. math. Monthly **56**, 306 (1949)] bewies die Existenz von unendlich vielen Pseudoprimzahlen  $n$  mit  $v(n) = 3$ , wo  $v(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $n$  bezeichnet. Verf. zeigt durch Induktion nach  $k$ : Für jedes  $k$  gibt es unendlich viele quadratfreie Pseudoprimzahlen mit  $v(n) = k$ .

H. L. Schmid (Berlin).

**Chua, Lo-Ken: Additive Zahlentheorie.** Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov **22**, 180 S. (1947) [Russisch].

**Shapiro, Harold N.: Note on a theorem of Dickson.** Bull. Amer. math. Soc. **55**, 450—452 (1949).

Eine natürliche Zahl  $n$  soll „ $k$ -defekt“ genannt werden —  $k$  positiv reell —, wenn  $kn > \sigma(n)$ ; dabei ist  $\sigma(n)$  Summe aller Teiler von  $n$  ( $n$  inbegriffen). Im Falle  $kn \leq \sigma(n)$  heiße  $n$  „ $k$ -defektlos“. Ferner werde  $n$  „primitiv  $k$ -defektlos“ genannt, wenn  $n$   $k$ -defektlos und alle eigentlichen Teiler von  $n$   $k$ -defekt sind. Verf. beweist, daß es höchstens eine endliche Anzahl von primitiv  $k$ -defektlosen  $n$ , welche eine fixe Anzahl von paarweise verschiedenen Primzahlen als Teiler besitzen, gibt, wenn entweder 1)  $k$  irrational oder 2)  $k$  rational  $= r/s$ ,  $(r, s) = 1$  und gleichzeitig die Zahlen  $n$  durch die Eigenschaft eingeschränkt sind, daß mit  $p|r$  auch  $p^\alpha || n$  erfüllt ist, wobei der nicht negative ganze Exponent  $\alpha$  kleiner als eine feste positive Zahl  $C$  ist. Bedingung 2) ist im besonderen erfüllt, wenn  $(n, r) = 1$ . Dies ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von L. E. Dickson [Even abundant numbers, Amer. J. Math. **35**, 423—426 (1913)] für den Fall  $k = 2$ .

G. Kantz (Graz).

**Thébault, Victor: Concerning two classes of remarkable perfect square pairs.** Amer. math. Monthly **56**, 443—448 (1949).

Wird die  $B$ -adische Zahl ( $B$  natürliche Zahl  $> 1$ )  $a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0$ ,  $0 \leq a_i$  (ganz)  $< B$  durch das Symbol  $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_B$ , ausgedrückt, so eröffnen sich folgende Fragen: Für welche  $B$  gibt es nicht gleichzeitig verschwindende  $a, b$ , so daß 1.  $(abab)_B$  Quadrat einer natürlichen Zahl ist. 2.  $(abab)_B$  und  $(baba)_B$  gleichzeitig Quadrate natürlicher Zahlen sind. 3. Gleichzeitig  $(aabb)_B = (cc)_B^2$  und  $(bbaa)_B = (dd)_B^2$  gilt. Verf. bedient sich in diesem Berichte zur Beantwortung dieser Fragen, die er unter anderem in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **32**, 262) behandelt hat, einer anderen Untersuchungsmethode, die schließlich die gestellten Aufgaben auf die bekannte Auflösung von Pellischen Gleichungen zurückführt und zwar in 1. und 2. auf  $x^2 - ny^2 = -1$ , wo  $n$  eine in eine Summe von 2 Quadraten zerfallbare natürliche Zahl ist, und in 3. auf  $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ .

G. Kantz (Graz).

**Reiner, Irving: A generalization of Meyer's theorem.** Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 170—186 (1949).

Es handelt sich um das Theorem, daß jede primitive binäre quadratische Form mit ganzrationalen Koeffizienten unendlich viele Primzahlen aus einer mit den Charakteren der Form verträglichen arithmetischen Progression  $Mx + N$  darstellt. Die Verallgemeinerung, die vielleicht für die Struktur der Abelschen Gruppen, weniger aber für die Zahlentheorie Bedeutung haben dürfte, besteht in folgendem: Der Komplex der zur Diskriminante  $D$  primen Zahlen, welche überhaupt durch eine Form dieser Diskriminante darstellbar sind, wird durch einen allgemeineren, aus ganzrationalen Zahlen bestehenden Komplex  $G$  ersetzt. An die Stelle der Gruppe der primitiven Formenklassen der Diskriminante  $D$  tritt eine endliche Abelsche Gruppe  $H$ , deren Elemente eine wechselseitige Zuordnung zu den Zahlen aus  $G$  ermöglichen. Für die einem Element  $\theta$  aus  $H$  zugeordneten Zahlen aus  $G$  gilt dann das verallgemeinerte Theorem.

Brandt (Halle).

**Vandiver, H. S.: On the use of indeterminates in the theory of exponential sums.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 686—690 (1949).

Verf. entwickelt eine Methode, um den Kongruenzwert mod.  $m$  von rationalen algebraischzahligen Ausdrücken  $A(\zeta)$  in einer primitiven  $m$ -ten Einheitswurzel  $\zeta$  zu bestimmen. Die Methode besteht darin,  $\zeta$  durch eine Unbestimmte  $x$  zu ersetzen



und wiederholt die Differentialoperation  $x d/dx$  anzuwenden. Verf. spricht einige so zu erhaltende Ergebnisse unter speziellen Voraussetzungen über  $A(\zeta)$  aus. Als Anwendungsgebiete schweben ihm die Theorie der Exponential- und Charaktersummen, die Kriterien zur Fermatschen Vermutung und die expliziten Reziprozitätsformeln in algebraischen Zahlkörpern vor. Hasse (Berlin).

**Vinogradov, I. M.:** Die Methode der trigonometrischen Summen in der Zahlentheorie. Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov **23**, 110 S. (1947) [Russisch].

**Koksma, J. F. and R. Salem:** Uniform distribution and Lebesgue integration. Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 004. 9 S. (1949).

Sei  $f(t) \in L^2(0, 1)$  eine beschränkte, nach 1 periodische Funktion und bedeute  $\{u_n\}$  eine mod 1 gleichverteilte Folge. Verff. beschäftigen sich mit der Gültigkeit der Relation

$$(1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N f(x + u_n) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Wenn  $f(t)$  im Riemannschen Sinne integrierbar ist, dann gilt (1) für alle  $x$ . A. Khintchine hat (1) in dem Falle  $u_n = \Theta n$  ( $\Theta$  irrational) für fast alle  $x$  bewiesen [Mat.

Sbornik **41**, 11—13 (1934); dies. Zbl. **9**, 306]. Verff. beweisen, daß für  $\int_0^1 f(t) dt = 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| N^{-1} \sum_{n=1}^N f(x + u_n) \right|^2 dx = 0$$

im allgemeinen richtig ist. (In der Arbeit ist diese Formel mit irreführenden Klammern schlecht gedruckt.) Einerseits zeigen sie, mit Hilfe eines unpublizierten Ergebnisses von P. Erdős, daß die obigen Bedingungen für  $f(t)$  und  $\{u_n\}$  im allgemeinen zur Gültigkeit der Formel (1) nicht ausreichen. Andererseits beweisen sie folgenden

Satz: Sei  $(\log h)^\alpha \sum_{n=h+1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = O(1)$ , wo  $\alpha > 1$  und  $a_n, b_n$  die Fourier-Koeffizienten von  $f(t)$  bedeuten. Es sei weiter

$$(2) \quad \sum_{n=M+1}^{M+N} e^{2\pi i k u_n} = O(k^\sigma N^\sigma (M+N)^\tau)$$

mit  $\sigma + \tau < 1$  und  $\tau < \frac{1}{2}$ . Dann ist (1) für fast alle  $x$  richtig. Der Beweis ist auf einem noch unpublizierten Resultat von Ref. und J. F. Koksma gegründet: Wenn  $g_n(x) \in L^p(0, 1)$ , wo  $p \geq 1$  und

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} g_n(x) \right|^p dx = O((M+N)^{p-\lambda} N^\lambda (\log N)^{-1-\epsilon}),$$

dann ist  $N^{-1}(g_1 + g_2 + \dots + g_N) = o(1)$  für fast alle  $x$ . Nach Anwendung gewisser Sätze von Koksma und von J. G. van der Corput [Over stelsels Diophantische ongelijkheden, Diss. Groningen, 1930 und Math. Z. **29**, 397 (1929)] erhalten sie (2) noch für einige Folgen. Gál (Paris).

**Chinčín (Khintchine), A. Ja.:** Reguläre Systeme linearer Gleichungen und die allgemeine Aufgabe von Čebyšev. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **12**, 249—258 (1948) [Russisch].

Bedeute  $\{\Theta_{ij}\}$  ( $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ ) ein willkürliches System von reellen Zahlen und sei

$$L_j = L_j(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^m \Theta_{ij} x_i - y_j \quad (1 \leq j \leq n), \quad x = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|.$$

Verf. nennt  $\{\Theta_{ij}\}$  Čebyševsches System, wenn die Ungleichungen  $|L_j - \alpha_j| < \epsilon x^{m/n}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) für alle reellen  $\alpha_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) mit beliebig großem  $x$  lösbar sind. Es ist bekannt, daß die Diophantischen Ungleichungen  $|L_j| < t^{-1}$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $0 < x \leq t^{m/n}$ , für alle  $\{\Theta_{ij}\}$  unendlich viele Lösungen haben. Man kann  $\{\Theta_{ij}\}$  (bzw.  $L_j$ ) singuläres System (bzw. singuläre Form) nennen, wenn  $|L_j| < t^{-1}$  ( $1 \leq j \leq n$ ),



$0 < x \leq \varepsilon^{n/m}$ , für alle  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Lösungen haben. Verf. beweist dann den Satz: Alle nichtsingulären  $\{\Theta_{ij}\}$  sind Čebyševsche Systeme und alle Čebyševschen  $\{\Theta_{ij}\}$  sind nicht-singulär. Für den Fall  $m = n = 1$  hat schon Čebyšev den Satz bewiesen [Gesammelte Werke, Moskau, 1944, Bd. I, 237—275]. Die Beweismethode, mit der Verf. den Fall  $m \geq 1, n = 1$  früher erledigen konnte, kann man im allgemeinen nicht anwenden [Acta arith., Warszawa 2, 161—172 (1937); dies. Zbl. 18, 53]. Er beweist jetzt die erste Hälfte des Satzes mit Hilfe der J. L. Morrellschen Methode. Der Beweis der zweiten Hälfte des Satzes ist auf den folgenden Hilfssatz gegründet: Wenn die  $L_j$  Čebyševsche Formen sind, dann sind die Formen

$$M_i = \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} u_j - v_i \text{ nicht-singulär.} \quad \text{Gál (Paris).}$$

Chinč'in (Khintchine), A. Ja.: Über die Bruchteile einer Linearform. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 3—8 (1949) [Russisch].

Soit  $\{\lambda\} = \min_{(v)} |v - \lambda|$  où  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . L'A. démontre le théorème suivant: Soient  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  n'importe quels nombres réels et soient  $k, n$  ( $k \leq n$ ) entiers positifs. Pour tout  $t \geq 1$  ils existent  $k$  systèmes des entiers

$$(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) \quad (1 \leq j \leq k)$$

pour lesquels

$$\left| \sum_{i=1}^n \theta_i a_i^{(j)} \right| < t^{-1} \quad (1 \leq j \leq k) \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^k \max_{(i)} |a_i^{(j)}| < c(k, n) t^{k/n}.$$

On peut supposer les vecteurs  $(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_n^{(j)})$  indépendants. Le résultat pour les cas  $k < n$  ( $n \geq 2$ ) est une simple conséquence du cas spécial  $k = n$ . Gál (Paris).

Gelfond, A. O.: Über die algebraische Unabhängigkeit von transzendenten Zahlen gewisser Klassen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 13—14 (1949) [Russisch].

Verf. erhielt mit Hilfe seiner früheren Methoden drei Sätze [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 277—280 (1949)], die ohne Beweise angekündigt werden. Durch Adjunktion einer transzendenten Zahl (oder 0) entstehe der Körper  $R_0$  aus dem Körper der rationalen Zahlen; einen durch Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung  $\sum c_n x^n = 0, c_n \in R_0$ , zu  $R_0$  erzeugten Körper nennt Verf.  $R$ -Körper. Erster Satz: Seien die Zahlen  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  und  $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2$  unabhängig im Körper der rationalen Zahlen. Wenn für  $x > x_0 > 0$  und für alle ganze  $x_0, x_1, x_2$

$$(1) \quad |x_0 \eta_0 + x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2| > e^{-\gamma x \ln x}, \quad |x_i| \leq x; \quad i = 1, 2, 3$$

gilt, dann ist die Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen durch die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, e^{\eta_i \alpha_k}$  ( $i = 0, 1, 2; k = 0, 1, 2$ ) nicht  $R$ -Körper. Im zweiten Satz ist (1) durch eine ähnliche Bedingung ersetzt. Aus dem zweiten Satz folgt, daß wenigstens eine der Zahlen  $e^{\pi^{v+1}}, e^{\pi^{2v+2}}, e^{\pi^{3v+1}}$  transzendent ist. Der dritte Satz gibt eine durch  $s$

und  $\max_{0 \leq v \leq s} |r_v|$  bestimmte untere Schranke für  $\left| \sum_{v=0}^s r_v a^{b^v} \right|$ , wo  $a \neq 0, 1, b$  alge-

braisch,  $(r_1, r_2, \dots, r_s) = 1$ . Diese Abschätzung ist besser als die früheren Resultate von Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 2, 180—182 (1935); dies. Zbl. 11, 339 und Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 1939, 509—517; dies. Zbl. 24, 251]. Gál (Paris).

## Analysis.

### Allgemeines:

Loria, Gino: Sull'introduzione dei numeri immaginari e irrazionali. Archimede, Firenze 1, 48—49 (1949).

• Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil III: Flächen im Raume, Linienintegrale und mehrfache Integrale. Gewöhnliche



und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1949. 236 S. mit 167 Abb., kartoniert 7.—DM.

## Mengenlehre:

Levi, Beppo: Kritische und historische Untersuchung über die Arithmetik der Mengen und das Kontinuumproblem. *Math. Notae*, Rosario 8, 6—78 (1948) [Spanisch].

Verf. vertritt den Standpunkt, daß allein jener Teil der Mengenlehre sichere mathematische Erkenntnis darstellt, welcher ohne das Zermelorsche Auswahlaxiom deduziert werden kann; Konstruktionen, welche auf diesem Axiom beruhen, seien Illusionen. Um aber die Potenzierung  $A^B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  als Aufbauprinzip zur Verfügung zu haben, unterscheidet Verf. bei Existentialaussagen zwischen „Es gibt ein Element . . .“ und „Es gibt ein bestimmtes Element . . .“. Letztere Form wird als mit logischen Schwierigkeiten behaftet im Zusammenhang mit dem Zermeloschen Axiom abgelehnt. Mit diesem Gesichtspunkt werden die bekannten Arbeiten von G. Cantor, von welchen die allgemeine Mengenlehre ihren Ausgang genommen hat, einer kritischen Betrachtung unterzogen und gleichzeitig die dabei zugänglichen Sätze über Mengenmächtigkeiten entwickelt. In feiner Weise wird zwischen den Wunschträumen des Philosophen Cantor und der Vorsicht Cantors als Mathematiker ein Unterschied gemacht. Für die Konstruktion von Mengen höherer Mächtigkeit ergeben sich zwei Prinzipien: 1. Iteration der Potenzierung von Mengen und 2. Iteration der vollständigen Induktion im Bereich der Ordnungszahlen im Sinne einer Übertragung der Peanoschen Axiome auf transfinite (wohl-)geordnete Mengensysteme, wobei neben der Nachfolgeroperation noch eine Limesoperation und ein beide Operationen betreffendes Vollständigkeitsaxiom hinzutreten. Durch den Verzicht auf das Auswahlaxiom im Sinne Zermelos bleibt die generelle Vergleichbarkeit der Mengen offen, und natürlich erst recht der gegenseitige Vergleich der durch die beiden Konstruktionsprinzipien aufgebauten Mengentürme.

Aumann (Würzburg).

Rado, R.: Axiomatic treatment of rank in infinite sets. *Canadian J. Math.* 1, 337—343 (1949).

In Fortführung einer Untersuchung von H. Whitney [*Amer. J. Math.* 57, 509—533 (1935); dies. Zbl. 12, 4] wird eine abstrakte Rangfunktion  $r(A)$ , deren Werte beliebige Kardinalzahlen sein können, für die Teilmengen  $A$  einer Menge  $M$  definiert durch folgende Axiome: 1.  $r(N) = 0$  für die Nullmenge  $N$ . 2. Ist  $x$  ein nicht in  $A$  enthaltenes Element von  $M$ , so ist  $r(A) \leq r(A + \{x\}) \leq r(A) + 1$ . 3. Ist  $r(A) = r(A + \{x\}) = r(A + \{y\})$ , so ist  $r(A) = r(A + \{x, y\})$ . Eine Teilmenge  $A$  von  $M$  heißt unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge  $E$  von  $A$  die Funktion  $r(E)$  gleich der Anzahl der Elemente von  $E$  ist. Eine maximale unabhängige Teilmenge  $A'$  von  $A$  heißt eine Basis von  $A$ ; eine solche existiert stets. Alle Basen einer Teilmenge  $A$  von  $M$  besitzen dieselbe Kardinalzahl, welche folglich als der Rang  $r(A)$  von  $A$  definiert werden kann.

Eichler (Münster).

Cuesta, N.: Mächtigkeit von Ordnungstypen. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV, S. 7, 3—9 (1947) [Spanisch].

Es wird bewiesen: 1. Ist  $\alpha \geq 2^{\aleph_0}$ , so ist die Mächtigkeit aller stetigen Ordnungstypen der Mächtigkeit  $\alpha$  gleich  $2^\alpha$ . — 2. Für  $\alpha > \aleph_0$  ist  $2^\alpha$  die Mächtigkeit aller jener dichten Ordnungstypen, in welchen kein stetiger Typus einbettbar ist. — Einige weitere Bemerkungen beziehen sich auf spezielle Klassen von Ordnungstypen, wie sie Verf. in seiner „Dezimaltheorie der Ordnungstypen“ [*Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV, S. 3, 186—205, 242—268 (1943)] eingeführt hat.

Aumann (Würzburg).

Cuesta, N.: Note über einige Arbeiten von Sierpiński. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV, S. 7, 128—131 (1947) [Spanisch].



Mit der in seiner Arbeit „Dezimaltheorie der Ordnungstypen“ [Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 3, 186—205, 242—268 (1943)] entwickelten Methode behandelt Verf. die folgenden, von Sierpiński untersuchten Probleme: 1. Gibt es eine linear geordnete Menge einer Mächtigkeit  $> 2^{\aleph_0}$ , welche eine dichte Teilmenge der Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$  enthält? [Fundam. Math., Warszawa 3, 109—112 (1922).] 2. Eine dichte geordnete Menge der Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$  zu konstruieren, deren Schnitte und Lücken die Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$  haben [Accad. Sci. fisic. mat. Napoli, Rend., IV. S. 10, 355—356 (1940); dies. Zbl. 26, 105]. 3. Zur Mächtigkeit  $\aleph_\alpha$  eine geordnete Universalmenge zu bestimmen [Acta Pontificia Acad. Sci. 4, 207—208 (1940); dies. Zbl. 26, 105].

Aumann (Würzburg).

**Cuesta, N.: Dicht geordnete gestufte Mengen.** Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 57—71 (1948) [Spanisch].

Ist in einer Menge  $E$  durch ein System von Beziehungen zwischen ihren Elementen eine Struktur  $(R)$  definiert, so erzeugt die Gruppe der zu  $(R)$  gehörigen Automorphismen Äquivalenzklassen: Zwei Elemente sind äquivalent, wenn das eine in das andere durch einen Automorphismus übergeführt wird. Ein Element heißt dabei singulär, wenn es nur mit sich selbst äquivalent ist. Eine geordnete Menge heißt stufig geordnet, wenn mit je zwei äquivalenten Elementen auch alle dazwischen liegenden damit äquivalent sind; sie heißt (darüber hinaus) gestuft, wenn jedes Element singulär ist, d. h. also jede ordnungserhaltende 1-1-deutige Selbstabbildung die Identität ist. Verf. beantwortet die Frage nach dicht geordneten gestuften Mengen durch Konstruktion einer solchen Menge; als Elemente fungieren dabei endliche Komplexe  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  von Ordinalzahlen  $\alpha_k$ , deren Variationsbereiche durch vollständige Induktion festgelegt werden. Auf die Arbeiten des Verf. [Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 3, 186—205, 242—268 (1943) sowie id., IV. S. 4, 175—187, 215—233 (1944)] wird Bezug genommen. Aumann.

**Denjoy, Arnaud: L'introduction d'un nouvel élément dans un ensemble ordonné.** C. r. Acad. Sci., Paris 229, 570—573 (1949).

Verf. untersucht die Bedingungen, unter denen zwischen die Elemente einer geordneten Menge  $E$  ein neues Element  $a$  so eingeschoben werden kann (Setzung an den Anfang, bzw. das Ende der Menge eingeschlossen), daß die neu entstehende geordnete Menge den gleichen Ordnungstyp hat wie die alte. Für jede geordnete Menge läßt sich das neue Element so einschieben, daß ein anderer Ordnungstyp entsteht.  $a$  braucht nämlich nur nach dem größten wohlgeordneten Anfangsabschnitt gesetzt zu werden, bzw. an den Anfang der Menge, falls ein solcher Abschnitt nicht existiert. Zerlegt man  $E$  in die Mengen  $C$  und  $D$ , so daß jedes Element von  $D$  später ist als jedes von  $C$ , und schiebt man zwischen  $C$  und  $D$  das Element  $a$  ein, so haben  $E$  und  $E + (a)$  offenbar den gleichen Ordnungstyp, wenn  $C$  einen Endabschnitt vom Typus  $\omega^*$  oder  $D$  einen Anfangsabschnitt vom Typ  $\omega$  besitzt. Verf. gibt nun ein Beispiel für eine Menge  $E$  — und das nimmt den größten Teil der Ausführungen ein — bei der für jede Zerlegung  $C + D$  ( $C$  und  $D$  beide nicht leer) keine der genannten Eigenschaften zutrifft und trotzdem jedesmal die Mengen  $C + (a) + D$  den gleichen Ordnungstyp haben wie  $E$ . Wilhelm Ackermann (Lüdenscheid).

**Dienes, Z. P.: Note sur la comparaison des ensembles mesurables B.** J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 26, 227—235 (1948).

Die Vergleichbarkeit zweier Mengen  $E$  und  $F$ , d. h. die Entscheidung, welcher der Fälle  $E \subset F$ ,  $F \subset E$ ,  $E = F$ ,  $EF = 0$ ,  $EF \neq 0$  vorliegt, hängt ab von den zugelassenen Operationen. Verf. stellt sich auf den Standpunkt, daß nur Operationen abzählbaren Charakters und diese wiederum nur in abzählbarer Anzahl bei der Prüfung der Vergleichbarkeit benutzt werden dürfen. Er nennt eine Aussage  $D$ -prüfbar, wenn sie durch abzählbar viele Vergleiche von ganzen Zahlen prüfbar ist. Z. B. ist eine Gleichung oder Ungleichung zwischen zwei bestimmten reellen Zahlen  $D$ -prüfbar (was an Hand ihrer dyadischen Entwicklungen gezeigt wird). Ebenso



ist eine Gleichung  $a = \lim b_n$ , wo  $((b_n))$  eine monotone Folge reeller Zahlen bezeichnet,  $D$ -prüfbar. Das Hauptergebnis ist der Nachweis, daß auf der Zahlgeraden Mengenvergleichbarkeit jedenfalls innerhalb der Baireschen Mengenklassen  $B_0$ ,  $B_1$  und  $B_2$  im Sinne der  $D$ -Prüfbarkeit vorliegt. Es werden noch einige weitere Ergebnisse und Vermutungen in dieser Richtung dargelegt. *Aumann* (Würzburg).

### Differentiation und Integration reeller Funktionen:

**Goodstein, R. L.:** Missing value theorems. *Math. Gaz.*, London **33**, 19—25 (1949).

Besprechung der Beweise einer Reihe verwandter Sätze, bei denen es sich im Grunde um die Erweiterung des Definitionsbereiches gewisser Funktionen durch Einbeziehung gewisser Punkte handelt, Beweise, die in elementaren Darstellungen öfters lückenhaft sind. Beispiel: Verschwindet ein Polynom für alle  $x$ , so sind alle Koeffizienten Null; und der analoge Satz für Potenzreihen. *Haupt* (Erlangen).

**Charles, Fernand:** Sur l'extension aux fonctions implicites d'un théorème de Lindelöf et de sa généralisation. *Bull. Soc. Sci. Liège* **16**, 254—260 (1947).

L'A. applica all'equazione  $z = z_0 + f(x_1, \dots, x_n, z)$  il metodo delle approssimazioni successive in modo analogo a quello seguito da R. H. J. Germaey [*Bull. Soc. Sci. Liège* **11**, 442—446 (1946)] per i sistemi di equazioni differenziali in forma normale. *S. Cinquini* (Pavia).

**Chuang, Chi-Tai:** Sur les fonctions continues monotones. *Ann. sci. École norm. sup.*, III. S. **64**, 179—196 (1947).

Es handelt sich um Verallgemeinerungen eines Satzes von E. Borel über monotone Funktionen in der Formulierung von R. Nevanlinna [*Bull. Sci. math.*, II. S. **55**, 140—144 (1931); dies. Zbl. **2**, 37], wovon ein erster Satz lautet: 1. Für nicht negative Argumente  $x$ ,  $t$  seien  $f(x)$  nicht negativ, stetig und nicht fallend,

$\gamma(t)$  positiv, stetig und nicht wachsend mit  $c = \int_0^{+\infty} \gamma(t) dt < +\infty$ , und  $\delta(x)$

positiv, stetig und nicht wachsend mit  $\int_0^{+\infty} \delta(x) dx = +\infty$ . Dann gilt

$$(1) \quad f(x + \gamma(f(x))) - f(x) < \delta(x)$$

mit Ausnahme von  $x$ -Werten aus einer offenen Menge, in welcher die Totalvariation

von  $\int_0^x \delta(\xi) d\xi$  den Wert  $\delta(0)\gamma(0) + c$  nicht überschreitet. 2. Ein zweiter ähnlicher

Satz bezieht sich auf den Fall  $0 < t \leq 1$ , bei nicht wachsendem  $f$  mit  $0 < f(x) \leq 1$ .

3. Seien  $\gamma(t)$  und  $\delta(x)$  wie im ersten Satz erklärt. Es heißt  $f(x)$  eine Typenfunktion bezüglich  $\gamma(t)$  und  $\delta(x)$ , wenn  $f(x)$  positiv, stetig und nicht fallend gegen  $+\infty$  strebt für  $x \rightarrow +\infty$  und wenn (1) ausnahmslos für  $x \geq 0$  gilt. Ferner heißt  $g(x)$  eine engere Oberfunktion von  $f(x)$ , wenn schließlich  $f(x) \leq g(x)$  und das Gleichheitszeichen für eine gegen  $+\infty$  strebende Folge von  $x$ -Werten statthat. Als dritter Satz wird bewiesen: Sind  $\gamma$  und  $\delta$  wie eingangs erklärt, ist ferner  $f(x)$  für  $x \geq 0$  nicht negativ, stetig und nicht fallend mit  $f(x) \rightarrow +\infty$  für  $x \rightarrow +\infty$ , so gibt es zwei Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , so daß  $f_1$  und  $f_2$  Typenfunktionen bezüglich  $\gamma$  und  $\delta$ , außerdem  $f_1$  und  $f_2$  engere Ober- bzw. Unterfunktion von  $f$  sind. — 4. Ein analoger Satz hat ähnliche Voraussetzungen wie der zweite mit  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow +\infty$ . — Es werden noch einige Folgerungen aus diesen vier Hauptsätzen gezogen. *Aumann* (Würzburg).

**Zahorski, Zygmunt:** Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres. *Fundam. Math.*, Warszawa **34**, 183—245 (1947).

Soit  $f(x)$  une fonction de la variable réelle  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) admettant des dérivées de tous les ordres. Les points  $x$  se divisent en trois catégories: 1) le rayon



de convergence de la série de Taylor autour du point  $x_0$  est nul,  $x_0$  est alors un point singulier ( $P$ ), ou au sens de Pringsheim; 2) le rayon de convergence de la série de Taylor autour du point  $x_0$  est  $> 0$ , mais il existe des points  $x_0 + h$ , aussi voisins de  $x_0$  que l'on veut, pour lesquels la série de Taylor ne converge pas vers  $f(x_0 + h)$ ,  $x_0$  est alors un point singulier ( $C$ ), ou au sens de Cauchy; 3) la série de Taylor converge vers la fonction  $f(x)$  dans un voisinage de  $x_0$ ,  $x_0$  est alors un point régulier. — L'A. démontre que pour une fonction  $f(x)$  l'ensemble  $P$  des points singuliers ( $P$ ) est un  $G_\delta$ , l'ensemble  $C$  des points singuliers ( $C$ ) est un  $F_\sigma$  de 1-ère catégorie, et de plus  $\overline{P \cup C} = P \cup C$ ,  $P \cap C = 0$ . Réciproquement soit  $P$  un  $G_\delta$  et  $C$  un  $F_\sigma$  de 1-ère catégorie, tels que  $\overline{P \cup C} = P \cup C$  et  $P \cap C = 0$ ; il existe alors une fonction  $f(x)$  dont  $P$  est l'ensemble des points singuliers ( $P$ ),  $C$  est l'ensemble des points singuliers ( $C$ ) et le complémentaire de  $P \cup C$  est l'ensemble des points réguliers. L'A. construit  $f(x)$  comme la somme de deux fonctions  $\Omega(x)$  et  $\Psi(x)$ , où  $\Omega(x)$  est telle que  $P$  est l'ensemble des points singuliers ( $P$ ) de  $\Omega(x)$  et  $\Omega(x)$  est régulière sur le complémentaire de  $\bar{P}$  et  $\Psi(x)$  ne possède que des singularités ( $C$ ). La construction très délicate de la fonction  $\Omega(x)$  occupe la plus grande partie du mémoire, elle est exposée avec beaucoup de soin et une clarté parfaite. — Comme application de ces résultats l'A. démontre l'existence d'une fonction continue  $f(x)$ , telle que l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  ne contienne que des points isolés, quelle que soit la fonction analytique  $g(x)$ . Ceci est la solution d'un problème posé par Ulam. — Finalement l'A. démontre (sans utiliser les résultats précédents) le théorème suivant, énoncé par Pringsheim: Soit  $f(x)$  une fonction indéfiniment dérivable sur le segment  $a \leq x \leq b$ , et soit  $r(x)$  le rayon de convergence de la série de Taylor de  $f(x)$  au point  $x$ . S'il existe un  $r_1 > 0$  tel que  $r(x) \geq r_1$  pour  $a \leq x \leq b$ , alors  $f(x)$  est holomorphe sur ce segment. La démonstration originale de Pringsheim n'était pas rigoureuse; une autre démonstration correcte a été donnée par R. P. Boas jr. [Bull. Amer. math. Soc. **41**, 233—236 (1935); ce Zbl. **11**, 201]. — (Faute d'impression non signalée dans les Errata: p. 229, ligne 6 en descendant: au lieu de  $y^* = y$ , lire  $y^* = y/2d$ .)

Horváth (Paris).

**Bang, Thøger: On quasi-analytic functions.** 10. Skand. Mat. Kongr., København 1946, 249—254 (1947).

Exposé de quelques résultats obtenus par l'auteur dans sa thèse: Om quasi-analytiske Funktioner, København, 1946.

Horváth (Paris).

### Allgemeine Reihenlehre:

● **Hyslop, J. M.: Infinite series.** 3. ed., rev. New York: Interscience Publishers, Inc. 1947. 121 p.

Es handelt sich um die dritte Aufl. des 1942 in erster, 1945 in zweiter Auflage erschienenen Büchleins aus der Reihe der von A. C. Aitken und D. E. Rutherford herausgegebenen University Mathematical Texts. Das Ziel ist, jungen Studenten, die schon mit gewissen Teilen der Analysis vertraut sind, das Wichtigste über Unendliche Reihen zu vermitteln. Dies wird in neun angenehm zu lesenden und gut geschriebenen Kapiteln erreicht, denen jeweils zahlreiche Aufgaben mit Lösungen beigegeben sind. — Die Kenntnis der elementaren Funktionen, der Differentialrechnung von Funktionen einer Veränderlichen bis zum Taylorschen Lehrsatz und des Riemannschen Integrals wird vorausgesetzt. Das Wichtigste aus diesen Gebieten, insbesondere soweit es, wie z. B. der Begriff des Grenzwertes, für die Reihenlehre von Bedeutung ist, wird auf den ersten 24 Seiten zusammengestellt. Nach einem allgemeinen Kapitel über reelle Folgen und Reihen, das auch die Reihenentwicklungen einiger elementarer Funktionen bringt, werden sodann Reihen mit positiven Gliedern bis zum Raabeschen, Gaußschen und Integral-Kriterium behandelt. Im Kapitel über Reihen mit beliebigen Gliedern (absolute Konvergenz, Riemannscher Umordnungssatz, Abelsches Kriterium) werden kurz auch Reihen mit komplexen Gliedern erwähnt. Bei den Funktionenreihen stehen der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz (hinreichende Bedingungen für gliedweise Grenzübergänge) und die Potenzreihen (Konvergenzgebiet, Abelscher Grenzwertsatz) im Vordergrund. Ein besonderes Kapitel ist der Multiplikation von Reihen gewidmet (Sätze von Cauchy, Abel und Mertens). Im Kapitel über unendliche Produkte (reelle konstante und veränderliche Glieder, absolute und gleichmäßige Konvergenz)



wird das sin-Produkt einschließlich seines Zusammenhangs mit der Gammafunktion hergeleitet. Schließlich werden im letzten Kapitel Doppelreihen und iterierte Reihen (Cauchyscher Doppelreihensatz) behandelt. — An einigen Stellen sind nach des Ref. Ansicht Änderungen wünschenswert. Bei der Definition von  $f(x) \rightarrow l$  für  $x \rightarrow a$  (z. B.) auf S. 3 fehlt die Forderung, daß  $f(x)$  in einer gewissen Umgebung von  $x = a$  erklärt ist oder dergleichen. Unter der Überschrift Cauchy's condensation test wird S. 44 das Wurzelkriterium behandelt. Auf S. 69 ist die Unbeschränktheit von  $N(\epsilon, x)$  keine hinreichende Bedingung für ungleichmäßige Konvergenz. Die S. 86 gegebene Motivierung der Bevorzugung der Cauchyschen Produktreihe ist unbefriedigend. Zu bedauern ist, daß Verf. bei den Doppelreihen nicht die Pringsheimsche Konvergenzdefinition, sondern eine sehr viel engere gewählt hat, die übrigens nicht ganz klar formuliert ist. Auf S. 108 ist die Gleichung (2) nicht in Ordnung. Meyer-König (Stuttgart).

**Sonnenschein, Jakob:** Sur les séries divergentes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 594—601 (1949).

Indem eine Folge  $(p_0, p_1, \dots)$  als ein Punkt einer linearen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten  $p_n$  betrachtet wird, interpretiert Verf. unter anderem die bekannte Tatsache, daß der Matrix, gebildet aus den Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung der Potenzen einer Funktion  $f(z)$

$$f^k(z) = f_{k0} + f_{k1}z + f_{k2}z^2 + \dots + f_{kn}z^n + \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit  $f(1) = 1$ , eine Toeplitz-Schursche Mittelbildung darstellt (welche sich speziell für  $f(z) = \frac{1}{2}(1+z)$  auf die Eulersche und für  $f(z) = e^{z-1}$  auf die Borelsche Mittelbildung reduziert), welche die Teilsummen der Reihe  $\sum z^n$  gegen  $1/(1-z)$  limitiert für jedes  $z$ , für welches  $|f(z)| < 1$  ist. Karamata (Zemun).

**Teghem, J.:** Une généralisation des théorèmes  $E \rightarrow B$  et  $B \rightarrow E$  de M. Knopp. Nieuw Arch. Wiskunde, II. S. 23, 8—12 (1949).

Verf. definiert gewisse  $B(\alpha, m)$ - und  $E(q, m)$ -Summierungsverfahren. Das erste ist die Anwendung des Borelschen Integral-Verfahrens auf die Reihe  $a_m + a_{m+1} + \dots$ ; er integriert aber auf der Geraden  $r = \rho e^{i\alpha}$ . Man bekommt  $E(q, m)$  (wo  $q$  eine komplexe Zahl bedeutet), wenn man die Euler-Knoppische ( $E, q$ )-Methode auf  $a_m + a_{m+1} + \dots$  anwendet. Diese Verfahren sind nur im klassischen Falle, d. h.  $\alpha = 0$  bzw.  $q > 0$ , regulär. Verf. beweist dann, daß die K. Knopp'schen Einschließungssätze auch für diese Verfahren gültig sind [Math. Z. 18, 125—156 (1923)]; im kritischen  $E \rightarrow B$ -Falle benützt er aber den Tauberschen Satz der Borelschen Methode [G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Rend. Circ. mat. Palermo 41, 36—53 (1916)]. Gál (Paris).

**Vermes, P.:** Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer. J. Math. 71, 541—562 (1949).

Die Matrizen  $G = (g_{nk})$  bzw.  $A = (a_{nk})$  sollen  $\gamma$ - bzw.  $\alpha$ -Matrix heißen, wenn die mit ihnen gebildeten Transformationen  $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} g_{nk} u_k$  einer Reihe  $\sum_k u_k$  in eine Folge  $\sigma_n$  bzw.  $v_n = \sum_k a_{nk} u_k$  einer Reihe  $\sum_k u_k$  in eine Reihe  $\sum_k v_k$  permanent sind. Es werden Sätze der folgenden Art bewiesen: 1. Das Produkt  $GA$  einer  $\gamma$ -Matrix  $G$  und einer  $\alpha$ -Matrix  $A$  ist vorhanden und ist eine  $\gamma$ -Matrix; 2. das Produkt zweier  $\alpha$ -Matrizen ist vorhanden und ist eine  $\alpha$ -Matrix; 3. dann und nur dann ist das Produkt  $GA$  für jede  $\gamma$ -Matrix  $G$  vorhanden und eine  $\gamma$ -Matrix, wenn  $A$  eine  $\alpha$ -Matrix ist. — Sodann wird die Matrix  $A(\lambda)$  mit dem allgemeinen Element  $\binom{k}{n} \lambda^{k-n} (1-\lambda)^n$  ( $\lambda$  Parameter) betrachtet. Die mit ihrer Hilfe gebildete Transformation einer Reihe in eine Reihe gibt Anlaß zu einem Limitierungsverfahren, das hinsichtlich Permanenz, Indexverschiebung und Iteration untersucht und als Folgentransformation dargestellt wird. Es handelt sich dabei, wie Ref. bemerken möchte, um das von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Rend. Circ. mat. Palermo 41, 36—58 (1916)] als circle method bezeichnete und auch von R. Wais [Das Taylorsche Summierungsverfahren, Dissertation, Tübingen 1935, 58 S.] untersuchte und als  $T_\alpha$ -Verfahren bezeichnete Verfahren. Neu an den Untersuchungen des Verf. ist vor allem die Zulassung komplexer Werte für  $\lambda$  und die Bestimmung des bei Potenz-

reihen erzielten Summierbarkeitsbereiches durch eine Sternkonstruktion. Unter im wesentlichen anderen Gesichtspunkten als den vorliegenden wurde das Verfahren auch vom Ref. [Math. Z. 52, 257—304 (1949)] behandelt. — Die Transposition der Matrix  $A(\lambda)$  führt auf das Euler-Knopp'sche Limitierungsverfahren. Verf. ergänzt ein auf Anwendung dieses Verfahrens bei Potenzreihen und auf komplexe Ordnung bezügl. Resultat aus einer für Ref. unzugänglichen Arbeit von R. P. Agnew [Amer. J. Math. 66, 313—338 (1944)]. — Die Aufgabe der analytischen Fortsetzung einer Laurent-Reihe führt Verf. auf die mit Hilfe der Matrix  $a_{nk}(t) = \binom{k+n+1}{n} (1-t)^n t^k$  ( $t$  Parameter) gebildete Reihentransformation und das zugehörige, für  $0 < t \leq 1$  permanente Limitierungsverfahren. Die Möglichkeit der Indexverschiebung wird geprüft. Der für geeignete (nicht notwendig reelle) Parameter  $t$  bei Potenzreihen erzielte Summierbarkeitsbereich wird wieder durch eine Sternkonstruktion bestimmt. Unter der Bezeichnung  $S_\alpha$ -Verfahren wurde dieses Verfahren in im wesentlichen anderer Richtung (Zusammenhänge mit den Verfahren  $E_p$ ,  $B$  und  $T_\alpha$ ) auch in der oben angegebenen Arbeit des Ref. [vgl. ferner Math. Z. 52, 344—354 (1949)] untersucht.  
Meyer-König (Stuttgart).

Kuttner, B.: On positive Riesz and Abel typical means. Proc. London math. Soc., II. S. 49, 328—352 (1947).

Es sei  $0 \leq \mu_0 < \mu_1 \cdots \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(u)$  eine für  $u \geq 0$  wachsende Funktion,  $\Phi(u) \rightarrow \infty$  mit  $u \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n = \Phi(\mu_n)$ ,  $A_\mu(u) = \sum_{\mu_n \leq u} a_n$ ,  $A_\lambda(u) = \sum_{\lambda_n \leq u} a_n$ .

$A_\mu^{(k)}(u) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^u (u-t)^{k-1} A_\mu(t) dt$ ,  $A_\lambda^{(k)}(u)$  entsprechend. Es wird bewiesen: Satz 1.

Wenn  $\kappa = n + \theta$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $0 < \theta \leq 1$ ),  $\Phi(u)$  für  $u > \mu_0$  ( $n+2$ )-mal differenzierbar,  $\Phi(u) \geq 0$ ,  $(-1)^{\nu+1} \Phi^{(\nu)}(u) \geq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n+2$ ),  $\Phi(u)$  stetig für  $u \geq u_0$  ist, dann folgt aus  $A_\mu^{(\kappa)}(u) \geq 0$  für alle  $u$  stets  $A_\lambda^{(\kappa)}(u) \geq 0$  für alle  $u$ . Wenn außerdem  $\Phi''(u) < 0$  für  $u > \mu_0$  ist, dann ist  $A_\lambda^{(\kappa)}(u) > 0$ , sofern nicht  $A_\mu^{(\kappa)}(t) = 0$  für alle  $t$  mit  $\Phi(t) \leq u$ . Satz 2. Wenn  $\Phi(u)$  den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt und wenn die Reihen  $f_\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\mu_n s}$  und  $f_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$  für jedes  $s > 0$  konvergieren, so folgt aus  $f_\mu(s) \geq 0$  für alle  $s > 0$  stets  $f_\lambda(s) \geq 0$  für alle  $s > 0$ . Der Beweis des Satzes 2 gelingt so, daß die Vertauschbarkeit zweier Integrationen gezeigt wird, und dann Sätze von F. Hausdorff [Summationsmethoden und Momentfolgen, I und II, Math. Z. 9, 74—109, 280—299 (1921)] und S. Bernstein [Sur les fonctions absolument monotones, Acta Math., Uppsala 52, 1—66 (1929)] herangezogen werden.  
R. Schmidt (München).

Hadwiger, H.: Über eine Konstante Tauberscher Art. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 65—69 (1947).

Anknüpfend an einige Arbeiten des Verf. [vgl. H. Hadwiger, Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art, Comment. math. Helvetici 20, 319—332 (1947), wie auch A. Wintner, „A Tauberian theorem“, ebenda 216] wird gezeigt, daß,  $p = \sup n |a_n|$  gesetzt, eine absolute Konstante  $\tau$  existiert, derart, daß für eine passend gewählte Folge  $t_n$  für jedes  $n$  gilt:  $\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t_n^\nu - \sum_{\nu=1}^n s_\nu \right| < \tau p$ , und daß der kleinste Wert von  $\tau$  für  $t_n = 2^{-1/n}$  erreicht wird, in welchem Falle

$$\tau = C + \log \log 2 + 2 \int_{\log 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0,96804 \dots$$

der bestmögliche Wert von  $\tau$  ist.

Karamata (Zemun).



**Camm, G. L.:** Square roots of integers expressed as infinite series. *Math. Gaz.*, London 33, 99—104 (1949).

Es wird in ganz elementarer Weise bewiesen, daß

$$\sqrt{m^2 - 1} = m - \frac{1}{2m} \left[ 1 + \frac{1}{4m^2 - 2} \left[ 1 + \frac{1}{16m^4 - 16m^2 + 2} \left[ 1 + \dots \right] \right] \right]$$

Ähnliche Formeln werden für  $\sqrt{m^2 - n}$  aufgestellt ( $m, n$  sind ganze Zahlen  $0 < n < 2m - 1$ ).  
St. Fenyö (Budapest).

**Wall, H. S.:** Convergence of continued fractions in parabolic domains. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 391—394 (1949).

Sei  $c_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) eine Folge von komplexen Zahlen, für welche

$$|c_p| - \Re(c_p \cdot \exp i(\Phi_p + \Phi_{p+1})) \leq 2r \cos \Phi_p \cos \Phi_{p+1} (1 - g_{p-1}) g_p$$

gilt.  $r, \Phi_p, g_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) sind reelle Zahlen, welche folgenden Ungleichungen genügen:  $0 < r < 1$ ;  $-\pi/2 + c \leq \Phi_p \leq \pi/2 - c$  ( $0 < c < \pi/2$ );  $0 \leq g_p \leq 1$  ( $p = 1, 2, \dots$ ).  $r$  und  $c$  sind von  $p$  unabhängig. Es wird untersucht die Konvergenz des regelmäßigen Kettenbruches:

$$\frac{1}{1} + \frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1} + \frac{c_3}{1} \dots$$

Dieser konvergiert dann und nur dann, wenn a) ein  $c_p$  verschwindet; b)  $c_p \neq 0$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), aber die Reihe  $\sum |d_p|$  divergiert. Die Glieder dieser Reihe sind definiert durch die Formeln  $d_1 = 1$ ;  $d_{p+1} = 1/c_p d_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ). St. Fenyö.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Kneschke, A.:** Zur Theorie der Interpolation. *Math. Z.* 52, 137—149 (1949).

Ist  $f(x)$  eine in  $a \leq x \leq b$  entsprechend oftmalig differenzierbare Funktion, welche an den Stellen  $\{x_\nu\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) aus  $\alpha < x < \beta$  die Funktionswerte  $f(x_\nu)$  annimmt, so läßt sich  $f(x)$  in der Gestalt

$$(1) \quad f(x) = \sum_{\mu=1}^n f(x_\mu) L_\mu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x, \xi) f^{(n)}(\xi) d\xi \quad \text{mit}$$

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn}(x - \xi) - \sum_{\mu=1}^n L_\mu(x) \frac{(x_\mu - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn}(x_\mu - \xi) \right\}$$

schreiben, wobei  $L_\mu(x) = L(x)_j(x - x_\mu) L'(x_\mu)$  und  $L(x) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\nu)$ . —

Hieraus leitete G. Kowalewski folgendes allgemeinere Interpolationstheorem her: Es ist

$$(2) \quad f^{(\varrho)}(x) = S(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K_{\nu-1}^{(\varrho)}(x, \xi) f^{(\nu+\varrho)}(\xi) d\xi \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

mit der Interpolationsfunktion

$$S(x) = \sum_{\mu=1}^n f(x_\mu) I_{\mu 0}(x) + \sum_{\mu=1}^n f^{(\varepsilon)}(x_\mu) I_{\mu 1}(x) + \dots + \sum_{\mu=1}^n f^{[(\nu-1)+\varepsilon]}(x_\mu) I_{\mu, \nu-1}(x),$$

wobei  $n - \varrho = \varepsilon$  ist und die Entwicklungsfunktionen  $I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x)$ ,

$$I_{\mu 1}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K^{(\varrho)}(x, \xi) L_\mu^{(\varrho)}(\xi) d\xi, \dots, I_{\mu, \nu-1}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K_{\nu-2}^{(\varrho)}(x, \xi) L_\mu^{(\varrho)}(\xi) d\xi$$

vermöge der Kerniterationen

$$K_i^{(\varrho)}(x, \xi) = \int_{\alpha}^{\beta} K_{i-1}^{(\varrho)}(x, \eta) K^{(\varrho)}(\eta, \xi) d\eta = \int_{\alpha}^{\beta} K^{(\varrho)}(x, \eta) K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta, \xi) d\eta,$$

$$K^{(\varrho)}(x, \xi) = \partial^{\varrho} K(x, \xi) / \partial x^{\varrho}$$

erhalten werden können. — Verf. gibt für die Entwicklungspolynome  $I_{\mu\sigma}(x)$  die Integraldarstellungen

$$I_{\mu\sigma}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K_{\sigma-1}^{(e)}(x, \xi) I_{\mu 0}(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} K^{(e)}(x, \xi) I_{\mu, \sigma-1}(\xi) d\xi$$

an, nach welchen sich jedes Entwicklungspolynom als Kernintegral seines vorangehenden Polynoms auffassen läßt, und beweist die zu dieser Integralbeziehung äquivalente Differentialrelation. Schließlich berechnet er den in der Restfunktion

$$R(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K_{i-1}^{(e)}(x, \xi) f^{(i\epsilon+e)}(\xi) d\xi \quad \text{auftretenden Kern } K_i^{(e)}(x, \xi) \text{ als Iteration zu}$$

$K^{(e)}(x, \xi)$ . Ferner zeigt Verf., daß sich aus dem Kowalewskischen Interpolationstheorem folgende Interpolationstheoreme als Spezialfälle ergeben: Für  $\varrho = 0$ ,  $n = 2$ ,  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$  das Euler-Bernoullische Interpolationstheorem, für  $\varrho = 1$ ,  $n = 2$ ,  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$  das Euler-MacLaurinsche Interpolationstheorem und für  $\varrho = 0$ ,  $n = 1$ ,  $x_1 = \alpha$  die Taylorsche Interpolationsformel mit dem bekannten Bernoullischen Integralrestglied. Das Kowalewskische Interpolationstheorem (2) erweist sich also als gemeinsame Quelle für eine Reihe von Interpolationsgesetzen, welche bisher gesondert bewiesen werden mußten. — Aus (2) folgert Verf. zwei Quadraturformeln, welche er als erste und zweite Kowalewskische Quadraturformel bezeichnet. Die erste Kowalewskische Quadraturformel lautet:

$$(3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = S + \int_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{R}_i(\xi) f^{(in)}(\xi) d\xi$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^n \{I_{\mu 0} f(x_{\mu}) + I_{\mu 1} f^{(n)}(x_{\mu}) + \dots + I_{\mu, i-1} f^{[(i-1)n]}(x_{\mu})\},$$

$$\text{wobei} \quad \mathfrak{R}_{\sigma}(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} K_{\sigma-1}(x, \xi) dx = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, \xi) \mathfrak{R}_{\sigma-1}(x) dx, \quad \mathfrak{R}_0 = 1$$

$$\text{und} \quad I_{\mu\sigma} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{R}_{\sigma}(\xi) L_{\mu}(\xi) d\xi \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots)$$

ist. — Man erhält diese Quadraturformel aus (2), wenn man für  $\varrho = 0$  nach  $x$  von  $\alpha$  bis  $\beta$  integriert. — Speziell ergibt sich für  $i = 1$  die Newtonsche Quadraturformel, für  $n = 1$  und  $x_1 = \alpha$  bzw.  $x_1 = \beta$  die Taylorsche Quadraturformel, für  $x_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  die MacLaurinsche Quadraturformel und für  $n = 2$ ,  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$  die Boolesche Quadraturformel. — Die zweite Kowalewskische Quadraturformel sieht folgendermaßen aus: Es ist

$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = S + \int_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{G}_{i-1}(\xi) f^{(in-1)}(\xi) d\xi$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^n \{H_{\mu 0} f(x_{\mu}) + H_{\mu 1} f^{(n-1)}(x_{\mu}) + \dots + H_{\mu, i-1} f^{[(i-1)n-1]}(x_{\mu})\},$$

$$\text{wobei} \quad \mathfrak{G}_0(\xi) = - \sum_{\mu=1}^n L_{\mu} K'(x_{\mu}, \xi) \quad \text{mit} \quad L_{\mu} = \int_{\alpha}^{\beta} L_{\mu}(x) dx,$$

$$\mathfrak{G}_i(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, \xi) \mathfrak{G}_{i-1}(x) dx \quad \text{und}$$

$$H_{\mu\sigma} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi) L_{\mu}(\xi) d\xi, \quad H_{\mu 0} = L_{\mu}; \quad \sigma = 1, 2, \dots$$

ist. — Diese Quadraturformel erhält Verf. durch Umformung des Ausdruckes  $\sum_{\mu=1}^n L_{\mu} f'(x_{\mu})$  mit Hilfe von (2) für  $\varrho = 1$ . Für  $n = 2$  ergibt (4) die Euler-MacLaurinsche Quadraturformel.

Lammell (Tutzing).



**Szarski, J.:** Sur une méthode d'approximation des fonctions. Ann. Soc. Polonaise Math. **20**, 121—125 (1948).

Sia  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una funzione continua in un insieme aperto  $A$  ed  $E$  un insieme aperto, e limitato contenuto in  $A$ . Per ogni indice  $\nu$  abbastanza grande, l' $A$ , considera le funzioni definite in  $E$ :

$$F_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{z^n (1/\nu)^n} \int_{x_1-1/\nu}^{x_1+1/\nu} \dots \int_{x_n-1/\nu}^{x_n+1/\nu} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

e studia la convergenza della successione  $\{F_\nu\}$  verso  $f$ , nonchè le proprietà delle funzioni  $F_\nu$  in relazione a quelle di  $f$ . — A proposito di dette funzioni, esse furono già introdotte da L. Tonelli [cfr. Sulla definizione di funzioni di due variabili a variazione limitata, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., IV. S. **7**, 357—363 (1928); p. 361].

*C. Miranda (Napoli).*

**Jordan, Charles:** Note on approximation and graduation by orthogonal moments. Hung. Acta Math. **1**, 4—9 (1949).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Überblick über eigene frühere Arbeiten. — Den Zahlen  $x = 0, 1, \dots, N-1$  seien die reellen Werte  $y_0$  bzw.  $y_1, \dots, y_{N-1}$  zugeordnet. Es ist dasjenige Polynom  $f_n(x)$  vom Grade  $n$  (insbesondere  $n < N-1$ ) gesucht, dessen Werte in  $x = 0, 1, \dots, N-1$  möglichst wenig von den  $y_\nu$  abweichen: Die Quadratsumme  $S = \sum_{\nu=0}^{N-1} [f_n(\nu) - y_\nu]^2$  soll für die gesuchte Funktion  $f_n(x)$  kleiner als die entsprechende Quadratsumme jedes beliebigen anderen Polynoms  $n$ -ten Grades sein. — Die Funktionen

$$U_{N,m}(x) = c_{N,m} \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{m+\lambda} \binom{m+\lambda}{m} \binom{N-\lambda-1}{m-\lambda} \binom{x}{\lambda} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

(die  $c_{N,m}$  sind gewisse, für die Rechnungen zweckmäßig festgelegte Konstanten) sind bezüglich  $x = 0, 1, \dots, N-1$  orthogonale Polynome, da sie den Gleichungen

$\sum_{x=0}^{N-1} U_{N,m}(x) U_{N,m'}(x) = 0$  ( $m \neq m'$ ) genügen. Unter dem orthogonalen Moment  $\Theta_{N,m}$  wird der Wert  $\Theta_{N,m} = \sum_{\nu=0}^{N-1} U_{N,m}(\nu) y_\nu$  verstanden. Dann ist

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^n \left\{ \sum_{\mu=0}^m C_{N,m,\mu} \Theta_{N,m} \binom{x}{\mu} \right\},$$

wobei die  $C_{N,m,\mu}$  explizit angegebene, von den  $y_\nu$  unabhängige Konstanten sind. Ein rechnerisch sehr einfaches Verfahren zur Ermittlung der  $\Theta_{N,m}$  wird beschrieben. — Für  $S$  wird eine Formel angegeben. Ein Vorteil der Methode liegt darin, daß man bei nicht genügender Approximation vermöge  $f_n(x)$  unter Benutzung der für  $f_n(x)$  errechneten Werte zum besseren Polynom  $f_{n+1}(x)$  übergehen kann. — Zuletzt wird der Wert  $f_n(\nu_0)$  einer besonderen Betrachtung unterzogen, wobei  $\nu_0$  mittlerer Abzissenspunkt des Intervalls ist. — Alle Untersuchungen lassen sich leicht auf beliebige äquidistante Abszissenpunkte übertragen.

*Töpfer (Köln).*

**Zahorski, Z.:** On zeros of quasianalytic ( $B$ ) functions. Bull. Calcutta math. Soc. **39**, 157—165 (1947).

Let  $\varepsilon_n$  be a sequence of positive numbers tending to zero. The au. calls a function  $f(z)$  of the complex variable  $z$  quasi-analytic ( $B \varepsilon_n$ ) in  $|z| \leq 1$  if there exists a sequence of positive integers  $n_k$  ( $n_k \rightarrow \infty$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) and a sequence of polynomials  $P_k(z)$ ,  $P_k(z)$  being of degree  $n_k$ , so that  $|f(z) - P_k(z)| < \varepsilon_{n_k}$  for  $|z| \leq 1$  and  $k = 1, 2, 3, \dots$ . — It is shown that to every sequence  $\varepsilon_n$  and to every perfect set  $E$  lying on the circumference  $|z| = 1$ , there exists a non identically vanishing function  $f(z)$ , quasi-analytic ( $B \varepsilon_n$ ) in  $|z| \leq 1$ , possessing derivatives of all orders quasianalytic ( $B \varepsilon_n$ ) in  $|z| \leq 1$  and such that  $f^{(m)}(z) = 0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) for all  $z$  belonging to a perfect subset  $E_1$  of  $E$  having the power of continuum. *Horváth.*

**Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer:** Functions whose Fourier-Stieltjes coefficients approach zero. *Duke math. J.* **16**, 327—329 (1949).

Sia  $\varrho(t)$  una funzione a variazione limitata in  $(-\pi, \pi)$  e ivi regolare,  $2\varrho(t) = \varrho(t+) + \varrho(t-)$  per  $-\pi < t < \pi$ , e si consideri la funzione  $f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\varrho(t)$ . Gli AA. dimostrano che se  $\varrho(t)$  è continua in  $-\pi$  [ $\varrho(-\pi+) - \varrho(-\pi) = 0$ ], oppure in  $\pi$  [ $\varrho(\pi) - \varrho(\pi-) = 0$ ], allora se esiste una successione limitata  $\{k_n\}$  di numeri reali tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n + i k_n) = 0$  si ha anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . [Quando sia  $k_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), cfr. ad es. R. C. Young, questo Zbl. **11**, 397.] Il risultato si inverte nel senso che, supposto  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ , allora  $\varrho(t)$  è continua per  $-\pi \leq t \leq \pi$ ; oppure, se  $f(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  per valori interi positivi, allora  $\varrho(t)$  è continua per  $-\pi < t < \pi$ , e si ha inoltre  $\varrho(\pi) - \varrho(\pi-) = \varrho(-\pi) - \varrho(-\pi+)$ .  
Giovanni Sansone (Firenze).

**Sbrana, Francesco:** Su una proprietà degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. S. **4**, 101—103 (1949).

In Verallgemeinerung eines von Fubini [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. **4**, 47—50 (1935); dies. Zbl. **10**, 351] herrührenden Kriteriums für Fourierreihen werden einfache hinreichende Bedingungen dafür mitgeteilt, daß eine samt ihren Ableitungen der ersten beiden Ordnungen in einem Intervall stetige Funktion in eine Reihe nach daselbst stetigen, normierten Orthogonalfunktion entwickelbar ist.

Garten (Tübingen).

**Ganzburg, I. M.:** Über eine Methode der Annäherung stetiger Funktionen durch trigonometrische Summen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **64**, 13—16 (1949) [Russisch].

Let  $S_n(f, x)$  denote the  $n$ th partial sum of the Fourier series of the function  $f$ . The au. gives necessary and sufficient conditions for sequences  $|\alpha_n| \leq \pi$ ,  $|\beta_n| \leq \pi$  in order that the expressions  $\frac{1}{3} \{S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n) + S_n(f, x + \beta_n)\}$  and  $S_n(f, x + \alpha_n) + S_n(f, x + \beta_n) - S_n(f, x)$  should converge uniformly for any continuous periodic  $f$ . In the first case, for instance, the condition is that  $\alpha_n$  and  $\beta_n$  admit of a representation  $4p\pi/3(2n+1) + O(1/n \log n)$  where the functions  $p = p(n)$  take only a finite number of values of the form  $3r \pm 1$ . The method of proof is that of estimating the Lebesgue constants. G. G. Lorentz (Toronto).

**Schmetterer, Leopold:** Zur Fourierentwicklung des Produktes zweier Funktionen. *Mh. Math.*, Wien **53**, 53—62 (1949).

The au. gives some results pertaining to the following problem. Let  $f(x)$  be a function of a given class and let its Fourier series be convergent at  $x_0$ . Then conditions on a function  $g(x)$  are sought which insure the convergence at  $x_0$  of the Fourier series  $\mathfrak{F}$  of the product  $f(x)g(x)$ . He proves (by an example) that  $\mathfrak{F}$  needs not to converge if  $f$  is continuous and  $g$  absolutely continuous, further that  $\mathfrak{F}$  converges whenever  $f$  is of bounded variation and  $g$  absolutely continuous [it should be observed that this is trivial on account of Dirichlet's theorem]. There are also theorems in which  $\mathfrak{F}$  is replaced by the Fourier series of  $\frac{1}{2}\{f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\}g(x)$  at  $x = x_0$ .  
G. G. Lorentz (Toronto).

**Meňšov, D.:** Über Fourierreihen stetiger und summierbarer Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **67**, 787—789 (1949) [Russisch].

Let  $P$  be the following problem. A function  $f(x)$  on  $[-\pi, +\pi]$  of a certain class being given, does there exist, for any  $\varepsilon > 0$ , a function of the same class, which is different from  $f$  only on a set  $E$  of measure  $< \varepsilon$ , such that the Fourier series of the new function is converging on  $[-\pi, +\pi]$  in some sense? — For continuous functions and uniform convergence  $P$  has been solved to the positive by the author [Mat. Sbornik, n. S. **11**, 67—96 (1942)]. He states now some theorems in the same direc-



tion. (1) For continuous functions and uniform convergence the set  $E$  may be made depending only upon  $\varepsilon$  and the modulus of continuity of  $f$ . That a set  $E$  depending on  $\varepsilon$  alone cannot exist follows from (2). For any perfect set  $E_1$  of positive measure and any of its points of density  $x_0$  there is a function  $f$  continuous on  $[-\pi, +\pi]$  and such that the Fourier series of any bounded measurable function which is equal to  $f$  on  $E_1$ , is divergent at  $x_0$ . (3) For the class of integrable functions and convergence almost everywhere the answer to P is again yes, and the set  $E$  may be taken open, with nowhere dense complement and depending only upon  $\varepsilon$ . *G. G. Lorentz.*

**Nikol'skij, S. M.: Fourierreihen von Funktionen, die eine Ableitung von beschränkter Variation besitzen.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 513—532 (1949) [Russisch].

Die Arbeit enthält ausführliche Beweise der Sätze, die Verf. vor kurzem in Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 13—15 (1949) veröffentlicht hat und die in dies. Zbl. **31**, 158—159 referiert wurden. *Béla Sz. Nagy* (Szeged).

**Vernotte, Pierre: Somme, en termes finis, des séries de Fourier les plus générales, en tout point hors de l'intervalle où elles ont été formées.** C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 966—968 (1948).

Probleme der Wärmeströmung führen auf allgemeine Fouriersche Entwicklungen der Form  $\sum A_{\lambda_\nu} \cos \varphi_{\lambda_\nu} \cos \lambda_\nu x + \sum A_{\lambda_\nu} \sin \varphi_{\lambda_\nu} \sin \lambda_\nu x$ , worin die  $\lambda_\nu$  Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind. In früheren Noten [C. r. Acad. Sci., Paris **206**, 590 (1938), **217**, 364 (1943)] hat Verf. Fragen der Darstellung durch solche Entwicklungen behandelt, und er berichtet hier über weitere Ergebnisse, wegen deren ausführlicherer Behandlung er auf seine Thermocinétique (Publ. sci. techn. Minist. de l'Air, Sér. grise, **225**) verweist. *R. Schmidt* (München).

**Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski: Notes on Fourier series. V: Summability ( $R_1$ ).** Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 173—185 (1949).

Der Lebesguesschen Summationsmethode ( $R, 1$ ), die einer Reihe  $\sum u_n$  den Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow +0} \sum_1^\infty u_n (\sin nh)/nh$  als verallgemeinerte Summe zuordnet, wird die Methode ( $R_1$ ), welche der Reihe  $\sum u_n$  den Grenzwert  $\lim (2/\pi) \sum s_n (\sin nh)/n$  zuordnet, gegenübergestellt. Beide Methoden sind nicht regulär und miteinander unvergleichbar. Im Gegensatz zu ( $R, 1$ ) ist ( $R_1$ ) nur für Funktionen  $f$  einer Lebesguesschen Klasse  $L^p$  mit  $p > 1$  „Fourier-effektiv“, während es Fourierreihen aus  $L$  gibt, die nirgends  $R_1$ -summierbar sind. Das Hauptergebnis der Untersuchungen stellen notwendige und hinreichende Bedingungen für die  $R_1$ -Summierbarkeit dar, die für  $f$  und unter gewissen Einschränkungen auch für die konjugierte Funktion  $\tilde{f}$  ausgesprochen werden. *Garten* (Tübingen).

**Banerjee, D. P.: On the convergence of certain lacunary trigonometric series.** Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 86 (1949).

Unter Bezugnahme auf ein Ergebnis von Zygmund [On the convergence of lacunary trigonometric series, Fundam. Math., Warszawa **16**, 90—107 (1930)] gibt Verf. ein Beispiel einer trigonometrischen Lückenreihe, die fast überall divergiert und doch in einem beliebigen Intervall Punkte besitzt, in welchen sie gegen jeden vorgeschriebenen Wert konvergiert. *Garten* (Tübingen).

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Cherry, T. M.: On expansions in Eigenfunctions, particularly in Bessel functions.** Proc. London math. Soc., II. S. **51**, 14—45 (1949).

L'A. partendo dall'espressione  $y = F(x, w)$  ( $w = u + i v$ , parametro complesso) dell'integrale dell'equazione  $d^2 y/dx^2 + w^2 y = w f(x)$  che soddisfa le condizioni  $F(0, w) = 0$ , e se  $x > 0$   $F(x, w)$  limitato per  $v \rightarrow +\infty$ , nella sua memoria (presentata per la stampa nel 1943) stabilisce preliminarmente la formula integrale di

Fourier  $f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \operatorname{sen} wx \, dw \int_0^\infty f(t) e^{iwt} \, dt, \quad 0 < x < \infty,$

nell'ipotesi che  $f(x)$  sia a variazione limitata in ogni intervallo finito di  $0 \leq x < \infty$ ,

$2f(x) = f(x+) + f(x-)$  per  $x > 0$ ,  $\int_0^\infty |f(x)| e^{-\lambda x} \, dx < \infty$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $c \geq \lambda$ . — Con

analogo procedimento, operando su un particolare integrale dell'equazione

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (w^2 x^2 - \nu^2) y = w x^2 f(x)$$

con opportune ipotesi su  $f(x)$ , l'A. perviene a due rappresentazioni integrali di  $f(x)$  per le funzioni di Bessel  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  e successivamente, considerando la funzione di Nielsen  $H_\nu^{(1)}(z)$  dimostra una formula del tipo di Hankel

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{ic-u}^{ic+u} J_\nu(wx) w \, dw \int_0^\infty H_\nu^{(1)}(wt) f(t) \, dt, \quad 0 < x < \infty,$$

nell'ipotesi che  $f(x)$  sia a variazione limitata in ogni intervallo chiuso di  $0 < x < \infty$ ,

$2f(x) = f(x+) + f(x-)$ ,  $\int_0^1 x^M |f(x)| \, dx < \infty$ ,  $M < 1/2$ ,  $M < 1 - |R(\nu)|$ ,

$\int_1^\infty \sqrt{x} |f(x)| e^{-\lambda x} \, dx < \infty$ ,  $\lambda > 0$ ,  $c \geq \lambda$ . — L'A. dà infine due teoremi sulle formule

integrali di Weber e di Dini e un teorema di sviluppo in serie di funzioni  $Y_\nu$ .

Giovanni Sansone (Firenze).

Bailey, W. N.: A double integral. J. London math. Soc. **23**, 235—237 (1949).

Für hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlicher besteht nach Appell und Kampé de Fériet die Beziehung

$$(1) \quad F_2 \left[ \alpha; \alpha + \frac{1}{2} - \beta, \beta; \gamma, 2\beta; \frac{x}{(1+y)^2}, \frac{4y}{(1+y)^2} \right] \\ = (1+y)^2 F_4 \left[ \alpha, \alpha + \frac{1}{2} - \beta; \gamma, \beta + \frac{1}{2}; x, y^2 \right].$$

Andererseits fand Verf. [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **4**, 305 (1933); dies. Zbl. **8**, 14] als Produkt von Funktionen einer Veränderlichen

$$(2) \quad F_4[\alpha, \beta; \gamma, 1 + \alpha + \beta - \gamma; \xi(1 - \eta), \eta(1 - \xi)] \\ = F(\alpha, \beta, \gamma; \xi) F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma; \eta)$$

im Gebiet  $|\xi(1 - \eta)|^{\frac{1}{2}} + |\eta(1 - \xi)|^{\frac{1}{2}} < 1$ . Mit  $\sum_{n=1}^2 k_n^2 < 1 = k_0^2 + k_0'^2$  für  $\varrho = 1, 2$

setze man  $k'_1 - \sqrt{1 - k_1^2 - k_2^2} = (1 + k'_2) l_1$

und  $\sqrt{(1 + k_1)(k'_2 + k_1)} - \sqrt{(1 - k_1)(k'_2 - k_1)} = (1 + k'_2) l_2$ ;

dann findet ein Zerfall in vollständige elliptische Integrale statt:

$$1 + \frac{k'_2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi_1 \int_0^{\pi/2} d\varphi_2 (1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1 - k_2^2 \sin^2 \varphi_2)^{-\frac{1}{2}} \\ = \int_0^{\pi/2} d\psi_1 (1 - l_1^2 \sin^2 \psi_1)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} d\psi_2 (1 - l_2^2 \sin^2 \psi_2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wilhelm Maier (Jena).

Bose, B. N.: On certain integrals involving Bessel functions. Bull. Calcutta math. Soc. **40**, 8—14 (1948).

Die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} e^{-a^2 t^2} J_n(t) \frac{dt}{t}, \quad \int_0^{\pi/2} e^{-a \sin \theta} I_{n/2}(a \sin \theta) \sin^{n/2} \theta \cos \theta \, d\theta, \\ \int_0^{\pi/2} e^{-a \tan^2 \theta} I_{n/2+1}(a \cos^{-2} \theta) \cos^{n-1} \theta \cdot \sin \theta \, d\theta, \quad \int_0^1 P_n(1-2y^2) e^{-ay^2} I_m(ay^2) y^{2m+1} \, dy, \\ \int_0^\infty e^{-a^2 \cos^2 \varphi/4} D_{m+m'-1}(a \cos \varphi) \sin^{2m} \varphi \, d\varphi, \quad \int_0^\infty e^{-a^2 \cos^2 \varphi/4} D_{2s+2m+1}(a \cos \varphi) \sin^{2m} \varphi \, d\varphi$$



werden unter gewissen Einschränkungen für die in ihnen enthaltenen Parameter berechnet. Ferner wird eine Reihe von Lösungen der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(z+t)}{\pi(z+t)} \psi(t) dt = \psi(z)$$

angegeben; z. B.  $\psi(t) = t^{-\nu} J_{2n+\nu}(bt)$  ( $a \geq b > 0$ ,  $\nu > -\frac{1}{2}$ ),

$$\psi(t) = J_{n+\frac{1}{2}}(bt) J_{-n-\frac{1}{2}}(bt) \quad (a \geq 2b > 0),$$

$$\psi(t) = (x^2 + t^2)^{-(m+\nu+1)/2} J_{m+\nu+1}(b\sqrt{x^2 + t^2}) \quad (a \geq b > 0, m > -\frac{1}{2}, \nu > -1).$$

J. Meixner (Aachen).

Bailey, W. N.: Some integrals involving Hermite polynomials. J. London math. Soc. **23**, 291—297 (1949).

Das Integral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} H_m(ax) H_n(bx) \cdots dx$  kann bekanntlich durch Lauricellische hypergeometrische Reihen allgemein dargestellt werden. Verf. untersucht einige Spezialfälle, in denen das Integral durch gewöhnliche hypergeometrische Reihen und endliche Summen aus Gammafunktionen berechnet werden kann. Z. B. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(ax) H_n(bx) H_p(x) dx = \frac{(-1)^{k-p} m! p! 2^p a^{p-n} b^{m-p} \pi^{\frac{1}{2}}}{(k-p)! (p-n)!} F\left(\begin{matrix} n+1, -n; a^2 \\ p-n+1 \end{matrix}\right),$$

wenn  $a^2 + b^2 = 1$  und  $2k = m + n + p$ . Vgl. auch I. W. Busbridge (dies. Zbl. **32**, 276) und E. C. Titchmarsh (dies. Zbl. **32**, 275). W. Hahn (Berlin).

Bohl, Johann Georg von: Zur Lösung eines von Langmuir behandelten Integrals. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 402—407 (1949).

Die Bestimmung von Raumladungen führte J. Langmuir [Physic. Rev., Minneapolis, II. S. **33**, 958 (1929)] zur näherungsweisen Auswertung des Abelschen Integrals

$$\int_0^x dt \{t^{\frac{1}{2}} + \alpha [(1-t)^{\frac{1}{2}} - 1]\}^{-\frac{1}{2}} = j(x, \alpha)$$

für  $0 < x; \alpha < 1$ . Durch algebraische Reduktion wird  $j(x, \alpha)$  auf elliptische Normalintegrale Legendres zurückgeführt. Wilhelm Maier (Jena).

Katterbach, Klaus und Helmut Krause: Die Logarithmen der Integrale exponentialfunktionen. Z. Astrophys. **26**, 137—146 (1949).

## Funktionentheorie:

Kössler, Miloš: The signification of the number  $\sup |a_n|^{1/n}$  in the theory of power series. Časopis Mat. Fysiky, Praha **74**, 47—52 und engl. Zusammenfassg. 52—53 (1949) [Tschechisch].

Die Tatsache, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  für die Potenzreihe (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine so große Rolle spielt, veranlaßt den Verf., danach zu fragen, ob nicht auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  für die Potenzreihe (1) von Bedeutung ist. Zur Beantwortung dieser Frage werden folgende Sätze bewiesen: 1. Ist in (1)  $|a_n| = \gamma_n^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, k$ , und  $\lim_{n > k} \sqrt[n]{|a_n|} = g$ , so gilt für jede Nullstelle  $\zeta$  von (1):  $|\zeta| \geq x/g$ , wenn  $x$  die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $(1-x) \left(1 - \sum_{v=1}^n \gamma_v g^{-v} x^v\right) - x^{k+1} = 0$  bedeutet. 2. Ist in (1)  $a_1 > 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g$ , so hat die zu (1) inverse Potenzreihe einen Konvergenzkreis,

der nicht kleiner als  $(\sqrt{1+a_1/g}-1)^2$  ist. 3. Die Potenzreihe

$$f(z_1, z_2) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{v=0}^n a_{n-v,v} z_1^{n-v} z_2^v \right)$$

der beiden komplexen Variablen  $z_1$  und  $z_2$  hat in  $|z_k| < r$ ,  $k=1, 2$ , mit  $r = g^{-1}(1 - 1/\sqrt{1+a})$  keine Nullstelle, wenn  $a > 0$ ,  $g > 0$  und  $g = \inf_{0 \leq v \leq n} g_n$  mit  $g_n = \inf_{0 \leq v \leq n} \sqrt{|a_{n-v,v}|}$  ist. Mit Hilfe von Satz 3 wird schließlich bewiesen: 4. Ist  $a > 0$  und  $g = \inf_{n \geq 1} \sqrt{|a_{n+1}|}$ , so ist der Radius  $\varrho_1$  desjenigen Kreises  $|z| < \varrho_1$ , inner-

halb dessen sich die Potenzreihe  $az + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  konform verhält, nicht kleiner als  $g^{-1}(1 - 1/\sqrt{1+a})$ . — Die in den angeführten Sätzen auftretenden Schranken sind scharf. — Am Schluß der Arbeit weist Verf. noch darauf hin, daß seine Methode eine Reihe weiterer Anwendungsmöglichkeiten besitzt, wie z. B. bei der Frage nach der Existenz implizit gegebener Funktionen oder beim Existenzbeweis für die Lösungen von Differentialgleichungen. Die Bedeutung der sich ergebenden Sätze liegt in erster Linie darin, daß die erhaltenen Schranken nicht verbesserungsfähig sind. Lammel (Tutzing).

**Lochin, I. F.:** Bemerkungen über Abschätzungen regulärer Funktionen. Mat. Sbornik, n. S. **24**, 249—262 (1949) [Russisch].

Es sei  $f(z)$  eine im Einheitskreise reguläre analytische und  $F(z)$  eine ebenda reguläre analytische schlichte Funktion.  $f(z)$  wird zu  $F(z)$  subordiniert genannt, wenn der Wertebereich von  $f(z)$  in dem von  $F(z)$  enthalten ist. Es bedeute  $S$  die Klasse aller im Einheitskreise regulären schlichten Funktionen  $F(z)$  mit  $F(0) = 0$  und  $F'(0) = 1$ , und  $S$  die Klasse aller  $f(z)$  mit  $f(0) = 0$ , die irgendeiner  $F(z) \in S$  subordiniert sind. Folgende Sätze werden beweisen: 1. Ist  $f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots \in S$  ( $m \geq 1$ ), so gilt für  $|z| = r$  ( $0 < r < 1$ )

$$|f'(z)| \leq \frac{(1+r^m)m \cdot r^{m-1}}{(1-r^m)^3},$$

wobei Gleichheit nur für  $f(z) = z^m(1 - e^{\alpha i} z^m)^{-2}$  ( $\alpha$  reell) stattfindet. 2. Es ist  $|a_k| \leq 1$  für  $k = m, m+1, \dots, 2m-1$  und  $|a_{2m}| \leq 2$ . [Für  $m=1$  und  $f(z) \in S$  geben Sätze 1 und 2 wohlbekannte Abschätzungen aus der Theorie der schlichten Abbildungen.] 3. Wenn  $f(z) \in S$  und  $f(z_k) = a$ ,  $|z_k| = r_k < 1$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, p$  ist, so ist  $|f'(0)| \leq h R^2(1-R)^{-1}$ , wobei  $h = \sum_{k=0}^p (1-r_k^2)/r_k$  und  $R = \prod_{k=0}^p r_k$  gesetzt wurde; Gleichheit gilt nur, wenn alle Punkte  $z_k$  auf der gleichen Halbgeraden durch  $z=0$  liegen. 4. Es bedeute  $r$  den Radius des größten Kreises um  $z=0$ , in welchem eine gegebene Funktion  $f(z) \in S$  mit  $f'(0) = a_1$  jeden Wert höchstens in  $p$  Punkten annimmt, so ist  $r$  Wurzel der Gleichung

$$(p+1)r^p(1-r^2) - |a_1|(1-r^{2p+2}) = 0.$$

Satz 4 verallgemeinert einen Satz von J. Dieudonné [Ann. sci. École norm. sup., III. S. **48**, 247—358 (1931); dies. Zbl. **3**, 119], indem die Voraussetzung  $|f(z)| < 1$  durch die schwächere  $f(z) \in S$  ersetzt wird. 5. Wenn  $f(z)$  zu einer solchen  $F(z)$  subordiniert ist, welche den Einheitskreis auf einen schlichten und konvexen Bereich abbildet, so ist,  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  gesetzt,  $|a_n| \leq 1$  für  $n = 1, 2, \dots$ ; Gleichheit gilt nur für  $f(z) = z/(1 - e^{\alpha i} z)$  und für  $f(z) = e^{\alpha i} z^n$ . — Es bedeute  $C$  die Klasse aller im Einheitskreise regulären Funktionen  $f(z)$ , für welche  $f(z_1)f(z_2) \neq 1$  für



alle  $z_1$  und  $z_2$ , ( $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$ ). Es bedeute  $C_t$  die Klasse aller im Einheitskreise regulären Funktionen mit  $f(0) = 0$ , die der Funktion  $F_t(z) = \frac{z \cdot \sin t}{1 + i z \cos t}$  subordiniert sind ( $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ), ferner bedeute  $C$  die Vereinigungsmenge aller  $C_t$ . Da alle Funktionen  $F_t(z)$  den Einheitskreis auf durch die Punkte  $w_1 = +1$  und  $w_2 = -1$  gehende Kreise abbilden, sind (aus elementargeometrischen Gründen)  $C_t$  und somit auch  $C$  in  $\bar{C}$  enthalten. Verf. beweist u. a. die folgenden Sätze: 6. Für  $f(z) \in C$  mit  $f(0) = 0$  gilt Satz 3 sowie Satz 4. 7. Für  $f(z) \in C$  gilt für  $|z| = r$

$$|f(z)| < \frac{r^m}{\sqrt{1 - r^{2m}}}, \text{ wenn } f(z) = a_m z^m + \dots$$

8. Für  $f(z) \in C$  ist  $|a_n| \leq 1$ , und für  $f(z) \in C_t$  ist  $|a_n| \leq \sin t$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). — Verf. bemerkt (bei der Korrektur), daß für  $f(z) \in C$  die Ungleichung  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1$  stattfindet, in welcher Gleichheit nur für  $f(z) = F_t(z)$  möglich ist. Daraus folgt, daß im Satz 8 Gleichheit nur für  $f(z) = e^{i\alpha} z^n$  stattfinden kann. *A. Rényi.*

**Pham, Tinh-Quat:** Sur les fonctions entières périodiques. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 65, 11—70 (1948).

Sei  $f(z)$  ( $z = x + iy$ ) eine ganze periodische Funktion endlicher Ordnung, deren Periode  $2\pi$  ist.  $f(z)$  läßt sich als Produkt von zwei ganzen Funktionen nullter Ordnung darstellen, von denen die eine von  $e^{iz}$ , die andere von  $e^{-iz}$  abhängt. Verf. untersucht die Abhängigkeit des Wachstums von  $f(z)$  von den Nullstellen derselben. Für  $\log M(r)$  ergibt sich ein asymptotischer Ausdruck, der besonders einfach wird, falls  $f(z)$  von regelmäßigem Wachstum ist. Auf der Geraden  $y = \text{konst.}$  wird ein analoger Ausdruck für  $\log |f(z)|$  selbst erhalten, wenn nur die Nullstellen durch gewisse Kreise ausgeschlossen werden. Falls  $f(z)$  sich nicht auf eine endliche Kombination von Exponentialfunktionen reduziert, so kann kein Picardscher Ausnahmewert existieren. — In jedem Periodenstreifen existiert wenigstens eine mit der imaginären Achse parallele Häufungsgerade  $x = X$  der Nullstellen von  $f(z) - Z$ . Sei  $\varrho(X, Z)$  der Konvergenzexponent derjenigen dieser Nullstellen, die im Streifen  $|x - X| < \varepsilon$  liegen. Unter den Geraden  $x = X$  gibt es wenigstens eine der maximalen Ordnung  $\varrho$ , außer höchstens für zwei  $Z$ -Werte. Diese Geraden sind den Borelschen Richtungen analog. Ist die Ordnung von  $f(z)$  größer als 2, so gibt es in der Richtung der maximalen Ordnung eine unendliche Folge von Kreisen  $C_q$  mit beliebig kleinem Radius, derart, daß  $f(z)$  in jedem  $C_q$  jeden Wert  $Z$  wenigstens  $|z_q|^{q-1-\eta_q}$  mal ( $\eta_q \rightarrow 0$  für  $q \rightarrow \infty$ ;  $z_q$  Mittelpunkt von  $C_q$ ) annimmt, außer denjenigen  $Z$ -Werten, die auf der Riemannschen Kugel in zwei Kreisen liegen, deren Radien  $\rightarrow 0$  für  $q \rightarrow \infty$ . Die Beweise sind hauptsächlich nach Methoden von Valiron und Milloux ausgeführt. *V. Paatero (Helsinki).*

**Carlson, Fritz:** Sur les fonctions entières. Ark. Mat. Astron. Fysik, A 35, Nr. 14, 18 S. (1948).

Der bekannte Satz von Jentsch, wonach jeder Punkt des (endlichen) Konvergenzkreises einer Potenzreihe Häufungspunkt der Nullstellen ihrer Abschnitte ist, wird vom Verf. auf ganze Funktionen verallgemeinert. Bei einer ganzen Funktion

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  von positiver Ordnung  $\varrho$  häufen sich die Nullstellen ihrer Abschnitte

$P_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  gegen den unendlich fernen Punkt, und zwar in gewissem Sinn in allen Richtungen gleichmäßig. Für  $\varrho = \infty$  gibt es zu jedem  $f$  eine Abschnittsfolge  $\{P_{m_i}\}$  und eine Radienfolge  $\{R_{m_i}\}$ , so daß ( $\alpha > \alpha_0 > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $0 < \Phi \leq 2\pi$ ) die Nullstellenzahl von  $P_{m_i}$  in

$$(1 - \delta) R_{m_i} < |z| < (1 + \delta) R_{m_i}, \quad |\arg z - \Phi| < \alpha$$

gleich  $\frac{\lambda}{\pi} m_i (1 + o(1))$  ist. Im Falle  $0 < \varrho < \infty$  sind für die Beschreibung der Nullstellenverteilung einer gewissen Abschnittsfolge noch gewisse von  $\varrho$  abhängige Funktionen  $\varphi(u)$  und  $\theta(\alpha)$  nötig. Die Nullstellenzahl im Kreisring

$$R_{m_i} \cdot e^{-u} < |z| < (1 + \delta) R_{m_i}$$

ist dann größer als  $m_i \varphi(u) (1 + o(1))$ , in einem Winkelraum der Öffnung  $2\alpha$  größer als  $m_i \theta(\alpha) (1 + o(1))$ . Pfluger (Zürich).

**Ghermanescu, Michel: Opérateurs fonctionnels périodiques.** C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1190—1192 (1949).

In questa nota é enunciato (e dimostrato per  $p = 2$ ) il seguente teorema: Le sole funzioni  $\theta(z)$ , meromorfe in  $z$  (o in  $1/z$ ), che si riproducono dopo  $p$  iterazioni successive, sono della forma  $\theta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc \neq 0$ , allorquando  $a, b, c, d$  soddisfano alla condizione

$$(a+d)(u^{p-1} - v^{p-1}) - (ad-bc)(u^{p-2} - v^{p-2}) = 0,$$

dove  $u$  e  $v$  sono le radici dell'equazione

$$u^2 - (a+d)u + ad-bc = 0, \quad (a+d)^2 \neq 4(ad-bc).$$

L'A. osserva poi che il suddetto teorema rende applicabile un metodo di M. Parodi (questo Zbl. 29, 400, 30, 92, 32, 24) per la risoluzione di certe equazioni singolari di Fredholm, a una vasta classe di esse. F. Pellegrino (Roma).

**Iglesias, Tomás: Über die Umordnung von Dirichletschen Reihen.** Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 21—40 (1947) [Spanisch].

Die Dirichletsche Reihe (1)  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ , wo  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$

ist, sei für  $\Re(s) > C$  konvergent, so daß für diese  $s$  die Funktion  $f(s)$  analytisch ist. Werden nun die Glieder der Reihe (1) umgeordnet und wird vorausgesetzt, daß die erhaltene Reihe in jedem endlichen Gebiet innerhalb eines anderen Gebietes  $D$ , das die Halbebene  $\Re(s) > C$  enthält, gleichmäßig gegen  $F(s)$  konvergiert, so ist  $F(s)$  die analytische Fortsetzung von  $f(s)$  in dem außerhalb von  $\Re(s) > C$  gelegenen Teil von  $D$ . Es wird nun bewiesen, daß notwendig dafür, daß die Reihe (1) mit reellen Koeffizienten analytisch durch Umordnung in einen Streifen  $C_1 < \Re(s) \leq C$  fortsetzbar ist, die Bedingung ist, daß die beiden Reihen, die man aus den Gliedern mit positiven Koeffizienten und aus den Gliedern mit negativen Koeffizienten einzeln bilden kann, dieselbe Konvergenzabszisse haben. Ein analoges Kriterium gibt es auch für Reihen mit komplexen Koeffizienten. In der Arbeit werden 11 Theoreme bewiesen, von denen das 8. und 11. Theorem angeführt seien. — Theorem 8:

Es sei  $C$  die Konvergenzabszisse der umgeordneten Reihe und  $D$  die Konvergenzabszisse der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}|$ . Weiter sei  $\mu_n$  das Minimum der Exponenten  $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$  und  $M_n$  das Maximum der Exponenten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Die Partialsummen  $S_{n_p}(s)$  der Ordnungen  $n_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) mögen der Ungleichung  $\log |S_{n_p}(s)| < v(s) + \varepsilon < -\sigma + \varepsilon$  in einem Gebiet  $D$  außerhalb der Konvergenz-

halbebene der umgeordneten Reihe genügen, wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $v(s)$  eine reelle, in  $D$  stetige Funktion der komplexen Variablen  $s$  ist. Außerdem sei für jedes  $p$   $M_{n_p} < \mu_{n_p+1}$ . Dann konvergieren die Summen  $S_{n_p}(s)$  für  $p \rightarrow \infty$  gleichmäßig in einer genügend kleinen Umgebung jedes Punktes der Geraden  $\Re(s) = C$ , in dem  $F(s)$  regulär ist. — Theorem 11: Die Dirichletsche Reihe (1) besitze eine hyperkonvergente Partialsummenfolge in einer Umgebung eines Punktes  $s_0$  der Halbebene  $\Re(s) > C$ , in dem ihr  $n$ -tes Glied für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Die Reihe  $\sum_{p=1}^{\infty} |\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_{n_p+1}| (n_{p+1} - n_p) e^{-\lambda_{n_p+1} s}$  konvergiere in  $\Re(s) > 0$ . Die Folge



$\{\Sigma_{n_\nu}(s)\}$  ist dann hyperkonvergent in einer Umgebung jedes Punktes der Geraden  $\Re(s) = \Re(s_0)$ , deren sämtliche Punkte daher reguläre Punkte von  $f(s)$  sind, und es existiert eine Umordnung von (1), die gleichmäßig konvergent ist in jedem endlichen Gebiet innerhalb einer  $\Re(s) \geq \Re(s_0)$  enthaltenden Halbebene.

*E. Göllnitz (Chemnitz).*

**Min, Szu-Hoa:** On the order of  $\zeta(1/2 + it)$ . Trans. Amer. mat. Soc. **65**, 448—472 (1949).

Sätze über trigonometrische Summen der Art  $\sum_{n=a}^b \exp(f(n))$ , wo  $f(n)$  mehrfach differenzierbar ist, sind von Landau, van der Corput und Titchmarsh bewiesen worden und bilden mit einem Satze von Titchmarsh [Proc. London math. Soc., II. S. **38**, 96—115 (1934); dies. Zbl. **10**, 104] die Grundlage für die hier erfolgende Abschätzung von  $\zeta(s)$  auf  $\sigma = 1/2$ . Für  $a > t^{17/40} \log t^{143/176}$  und  $b < t^{1/2}$  ergibt sich mit  $f(n) = \log n$  die Abschätzung  $O(t^{15/92} \log t^{1/58})$ , für  $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$  dann dieselbe Größenordnung als Schranke. *Hoheisel (Köln).*

**Vil'ner, I. A.:** Nomographie analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **63**, 99—102 (1948) [Russisch].

**Vil'ner, I. A.:** Die Reduktion einer nomographierbaren analytischen Abhängigkeit auf eine Normalform. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 3—6 (1949) [Russisch].

Zur nomographischen Behandlung algebraischer Funktionen vom Geschlecht Null oder Eins wird die Uniformisierung des Problems durch elliptische Funktionen herangezogen. Eingehende Diskussion von Realitätsfragen und Grenzfällen. Verweis auf die Dissertation: Nomogramme 1. Klasse analytischer Funktionen komplexer Veränderlicher, Moskau 1946 und vier weiterer Veröffentlichungen des Verf. über denselben Gegenstand [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **53**, Nr. 3 (1946), **58**, 729—732 (1947); Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 6 (22) (1947) und dies. Zbl. **29**, 57]. *Wilhelm Maier (Jena).*

### Fastperiodische Funktionen:

**Levin, B.:** Neuer Aufbau der Theorie der fast-periodischen Funktionen von Levitan. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 585—588 (1948) [Russisch].

Eine  $\varepsilon$ -Fastperiode  $\tau$  einer stetigen Funktion  $f(x)$  muß nach Bohr die Bedingung  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$  für  $-\infty < x < \infty$  erfüllen. Dagegen erklärte Levitan eine  $\varepsilon, N$ -Fastperiode  $\tau$  durch  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$  für  $|x| < N$ . Unter Verwendung dieser weniger scharfen Definition kam Levitan zu dem Begriff der L-fastperiodischen (Lfp) Funktionen, welcher allgemeiner ist als derjenige der Bfp Funktionen von Bohr. Die Theorie der Lfp Funktionen wurde von Levitan durchgeführt [Zapiski Charkovsk. mat. Obščest. **15**, 2 (1939)]. Verf. gibt in großen Zügen eine durchsichtige Darstellung der Theorie. — Ähnlich wie bei Bfp Funktionen kann man, ausgehend von einer Lfp Funktion  $f(x)$  auf  $-\infty < x < \infty$  einen Konvergenzbegriff so einführen, daß die reellen Zahlen zu einem bedingt kompakten Raum  $\Omega_f$  werden, in dem  $f(x)$  eine stetige Funktion ist. Jede in  $\Omega_f$  stetige Funktion ist umgekehrt Lfp. Durch Einführung idealer Elemente schließt man  $\Omega_f$  ab und erhält einen kompakten Raum  $T_f$ . Ist  $f(x)$  Bfp, so ist  $f(x)$  auf  $\Omega_f$  gleichmäßig stetig und kann deshalb eindeutig so fortgesetzt werden, daß  $f$  zu einer stetigen Funktion auf  $T_f$  wird. Umgekehrt kann jede auf  $T_f$  gleichmäßig stetige Funktion als Bfp Funktion auf  $-\infty < x < \infty$  gedeutet werden. Ist  $f(x)$  nur Lfp, so versucht man, eine auf  $T_f$  Lebesgue-summierbare Fortsetzung von  $f(x)$  zu konstruieren. [Der Begriff des Lebesgueschen Maßes und Integrales kann in  $T_f$  unter Benutzung des auf  $-\infty < x < \infty$  erklärten Mittelwertes  $(1/2T) \int_{-T}^{+T} \dots dx$  eingeführt werden.]

Besitzt man eine solche Fortsetzung von  $f$ , so kann man deren Fourierreihe bezüglich der stetigen Charaktere von  $T_f$  bilden. (Da die Fortsetzung von  $f$  nicht eindeutig ist, kann es mehrere Fourierreihen geben.) Den Charakteren entsprechen eindeutig Funktionen  $e^{i\lambda x}$  auf  $-\infty < x < \infty$ . Man kann eine Fourierreihe der Lfp Funktion  $f(x)$  also in üblicher Weise wie bei Bfp Funktionen hinschreiben. Eindeutigkeitsatz: Wenn eine der Fourierreihen von  $f$  mit einer der Fourierreihen von  $g$  übereinstimmt, so sind die Lfp Funktionen  $f$  und  $g$  identisch. — Es gibt Lfp Funktionen, welche keine summierbare Erweiterung zulassen. Eine Lfp Funktion  $f$  besitzt jedoch immer eine solche Erweiterung, wenn  $\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_a \text{Gr. } (1/2T) \int_{a-T}^{a+T} f(x) dx < \infty$  ist. Unabhängig von dieser Bedingung gilt stets der Approximationssatz, dessen genaue Formulierung den Verhältnissen entsprechend komplizierter als bei Bfp Funktionen ist, der jedoch aus dem Bohrschen Satz und der Definition von Lfp gefolgert werden kann. Maak (Hamburg).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Montel, Paul: Sur un système d'équations aux différences finies. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 877—879 (1948).

Hier werden die Ergebnisse der Arbeit: Montel, „Sur quelques équations aux différences mêlées“, Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 337—353 (1948), dies. Zbl. **33**, 180 zusammengestellt. Töpfer (Köln).

Bruijn, N. G. de: The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations. Amer. J. Math. **71**, 313—330 (1949).

Die Lösungen  $f(x)$  der mit reellen stetigen Koeffizienten  $w(x)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  ( $x \geq 1$ ) versehenen linearen funktionalen Differentialgleichung

$$w(x) f'(x) + p(x) f(x) - q(x) f(x-1) = r(x)$$

werden für reelle  $x \geq 0$  betrachtet. Mit jeder beliebigen reellen, in  $0 \leq x \leq 1$  stetigen Funktion  $g(x)$  ist in  $0 \leq x < \infty$  genau eine Lösung  $f(x)$  festgelegt, die in  $0 \leq x \leq 1$  mit  $g(x)$  übereinstimmt. Unter gewissen Voraussetzungen für die Koeffizienten sind die  $f(x)$  in  $0 \leq x < \infty$  beschränkt, bzw. gilt bei  $x \rightarrow +\infty$  für die Ableitungen  $f^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x) \rightarrow 0$ , wobei  $\psi(x)$  die Periode 1 besitzt. Oder unter anderen Voraussetzungen ist für hinreichend große  $x$ :

$$\left| f^{(k)}(x) - \psi^{(k)} \left\{ x - \int_{B+1}^x (w(t)/p(t)) dt \right\} \right| \leq C(k) \int_{x-1}^{\infty} \Phi(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Hier ist  $\psi(x)$  eine von  $f(x)$  abhängende periodische Funktion mit der Periode 1 usw. — Die bei den einzelnen Sätzen vorausgesetzten Bedingungen sind nicht stets die gleichen und zum Beispiel von folgender Art: In  $x \geq 1$  gibt es eine fallende positive Funktion  $\Phi(x)$ , zu der eine positive Konstante  $A$  angegeben werden kann, so daß

$A > \Phi(1)$  und  $A > \int_1^{\infty} \Phi(x) dx$ ;  $B$  und  $D$  sind Konstanten. Es sei nun:

für  $x \geq 1$ :  $w(x) > 0$ ,  $|p(x) - q(x)| < B\Phi(x)$ ,  $|r(x)| \leq D\Phi(x)$ ,  $w^2(x) < B\Phi(x)$ ,  
für  $x \geq k+1$ :  $|w^{(k)}(x)| < B\Phi(x)$ ,  $|p^{(k)}(x)| < B\Phi(x)$ ,  $|q^{(k)}(x)| < B\Phi(x)$ ,  
 $|r^{(k)}(x)| \leq D\Phi(x)$ ,

für  $x \geq B+1$ :  $p(x) > 0,5$ .

Der Zusammenhang  $f(x) \rightarrow \psi(x)$  wird einer besonderen Betrachtung unterzogen. Den Abschluß bilden einige Beispiele; bemerkenswert ist dabei die Behandlung der Gleichung  $G'(x) = \exp(\alpha x + \beta) G(x-1)$  ( $\alpha > 0$ ) wegen ihres Zusammenhanges mit den Untersuchungen K. Mahlers. Töpfer (Köln).

Knebelman, M. S.: The Wronskian for linear differential equations. Amer. math. Monthly **56**, 252—254 (1949).



Data l'equazione differenziale

$$(A_0 D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_n) y = 0, \quad A_0 \neq 0,$$

con  $A_0, A_1, \dots, A_n$  costanti, se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sono le radici dell'equazione caratteristica

$$A_0 \varrho^n + A_1 \varrho^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

con il rispettivo ordine di molteplicità  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , l'A. mostra che nella formula  $w(x) = w(0) \exp(-A_1 x/A_0)$  dove  $w(x)$  è il wronskiano del sistema fondamentale  $e^{\alpha_i x}, x e^{\alpha_i x}, \dots, x^{r_i-1} e^{\alpha_i x}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) la costante  $w(0)$  ha l'espressione

$$\prod_{i=1}^k [1! 2! \dots (r_i - 1)!] \prod_{j>i} (\alpha_j - \alpha_i)^{r_i r_j}.$$

Giovanni Sansone (Firenze).

**Peyovitch, T.:** L'existence de solutions asymptotiques de certaines équations différentielles. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 88—92 (1947).

Das folgende System von Differentialgleichungen wird betrachtet:

$$\frac{dx}{dt} = -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y; \quad \frac{dy}{dt} = m + a_{21} e^x + a_{22} e^y.$$

Die Koeffizienten  $a_{ik}$  sind reelle oder komplexe Funktionen, stetig und beschränkt im Intervalle  $0 < t_0 \leq t < \infty$ ;  $l$  und  $m$  sind positive Konstante. Dann besitzt das System von Differentialgleichungen Lösungen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Re x = -\infty; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Re y = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = -l; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dt} = m.$$

Das System von Lösungen enthält eine beliebige Konstante. Zum Beweis benutzt Verf. die Methode der sukzessiven Approximation. Es wird noch bemerkt, das ähnliche Resultate für Systeme, welche mehr als zwei Gleichungen enthalten, mit derselben Methode bewiesen werden können.

St. Fenyö (Budapest).

**Dehousse, L.:** Sur le théorème d'Auric et son extension à un système différentiel linéaire, homogène, à coefficients constants. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 102—107 (1947).

A. Auric [Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, Nouv. Ann. Math., III. S. 13, 47—52 (1894)] provò che l'integrale  $y(x)$  dell'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

che soddisfa le condizioni di Cauchy  $y(0) = c_0, y^{(i)}(0) = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), può ottenersi dallo sviluppo della frazione

$$\frac{c_0 + (c_1 + a_1 c_0)x + \dots + (c_{n-1} + a_1 c_{n-2} + \dots + a_{n-1} c_0)x^{n-1}}{1 + a_1 x + \dots + a_n x^n} = A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m + \dots$$

convergente per  $|x| < \varrho$ , ove  $\varrho$  indica il minimo modulo delle radici del polinomio  $1 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ , ponendo

$$y(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!} x + \frac{A_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{A_m}{m!} x^m + \dots$$

L'A. dà una dimostrazione rapida e diretta del teorema e lo estende poi ai sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti.

Giovanni Sansone (Firenze).

**Greco, Donato:** Su un problema ai limiti per un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Giorn. mat. Battaglini, IV. S. 78, 216—237 (1949).

Gegeben sei die Gleichung

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[ \theta(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda A(x) + B(x)] y = 0$$

mit in  $(a, b)$ ,  $a < b$ , stetigen  $\theta(x)$ ,  $\theta'(x)$ ,  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $0 < m_1 \leq \theta(x) \leq M_1$ ,  $0 < m_2 \leq A(x) \leq M_2$ ,  $0 < m_3 \leq -B(x) \leq M_3$ ; Verf. stellt sich die Aufgabe, die Lösungen  $y(x, \lambda)$  von (1) zu bestimmen, die den Randbedingungen

$(\alpha_1 \lambda + \alpha'_1) y(a, \lambda) + (\alpha_2 \lambda + \alpha'_2) y'(a, \lambda) = 0$ ,  $(\beta_1 \lambda + \beta'_1) y(b, \lambda) + (\beta_2 \lambda + \beta'_2) y'(b, \lambda) = 0$  unter der Voraussetzung  $\alpha_1 \alpha'_2 - \alpha'_1 \alpha_2 > 0$ ,  $\beta_1 \beta'_2 - \beta'_1 \beta_2 < 0$  genügen. Als Vor-

bereitung betrachtet Verf. zwei spezielle Fälle des Problems:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 - 1 = \alpha_2 = \alpha'_2 = 0, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0; \\ \beta_1 = \beta'_1 - 1 = \beta_2 = \beta'_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0,$$

für die die Zahlen  $q_2 = -\beta'_2/\beta_2$ ,  $q'_2 = -\alpha'_2/\alpha_2$  zu zwei Intervallen gehören, die zwei verschiedene Eigenwerte von der Eigenschaft enthalten, daß die entsprechenden Eigenfunktionen dieselbe Anzahl von Nullstellen in  $(a, b)$  besitzen. Das allgemeine Problem wird auf diese beiden Spezialfälle zurückgeführt. *Giovanni Sansone.*

**Germay, R.-H.:** Sur une généralisation d'un théorème de Lindelöf pour les systèmes d'équations différentielles de forme normale. *Bull. Soc. Sci. Liège* 16, 2—6 (1947).

Si considera il sistema di equazioni differenziali

$$(1) \quad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \dots, y_p) \quad (j = 1, \dots, p),$$

ove le funzioni  $f_j$  sono definite nel campo  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,  $y_j^0 - b_j \leq y_j \leq y_j^0 + b_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), e soddisfano alla condizione di Lipschitz

$$|f_j(x, y_1, \dots, y_p) - f_j(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p)| \leq \sum_{r=1}^p K_{jr} |y_r - \bar{y}_r| \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Siano  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)$  ( $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ )  $p$  funzioni continue per le quali è  $y_j^0 - b_j \leq \varphi_j(x) \leq y_j^0 + b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), allorchè  $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ , ove  $a' \leq a$ .

— Siano  $N_j, M_j$  rispettivamente i limiti superiori di  $|y_j^0 - \varphi_j(x)|, |f_j(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))|$ , e si ponga  $N = \sum_{j=1}^p N_j$ ,  $M = \sum_{j=1}^p M_j$ ; sia  $K$  il più grande dei numeri  $\sum_{j=1}^p K_{jr}$ , ( $r = 1, \dots, p$ ) e sia  $b$  il più piccolo dei numeri  $b_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). — L'A. stabilisce l'esistenza, la continuità e l'unicità di un sistema di integrali  $\varphi_{1,\infty}(x), \dots, \varphi_{p,\infty}(x)$  del sistema differenziale (1), con  $\varphi_{1,\infty}(x_0) = y_1^0, \dots, \varphi_{p,\infty}(x_0) = y_p^0$ , nell'intervallo  $(x_0, x_0 + h)$ , ove  $h$  è il più piccolo dei numeri  $a', \frac{1}{K} \lg \left( 1 + \frac{bK}{M + NK} \right)$ .

*S. Cingini* (Pavia).

**Čudov, L. A.:** Die umgekehrte Aufgabe von Sturm-Liouville. *Mat. Sbornik*, n. S. 25 (67), 451—456 (1949) [Russisch].

G. Borg hat den folgenden Satz bewiesen [*Acta Math.*, Uppsala 78, 1—96 (1945)]: Mögen die beiden Eigenwertaufgaben

$$a) \quad y'' + \varphi(x)y = \lambda y, \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0,$$

$$b) \quad z'' + \psi(x)z = \lambda z, \quad \alpha z(0) + \beta z'(0) = 0, \quad \gamma' z(\pi) + \delta' z'(\pi) = 0$$

dasselbe Spektrum besitzen ( $\varphi$  und  $\psi$  sind gegebene Lebesgue-integrierbare Funktionen); ferner sei die Bedingung (B)  $\delta\delta' = 0$ ,  $|\delta| + |\delta'| > 0$  erfüllt. Dann gilt, fast überall in  $[0, \pi]$ :  $\varphi(x) = \psi(x)$ . — Verf. zeigt, daß dieser Satz auch dann besteht, wenn man die Bedingung (B) durch die folgende allgemeinere ersetzt: (B')  $\left| \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\delta}{\delta'} \right| \neq 0$ .

Der Beweis wird begründet auf einer Untersuchung der Lösung  $y(x, \lambda)$  des Anfangswertsproblems  $y'' + \varphi(x)y = \lambda y$ ,  $y(0, \lambda) = a_1$ ,  $y'(0, \lambda) = a_2$ , als ganze analytische Funktion von  $\lambda$ .

*Béla Sz. Nagy* (Szeged).

**Wintner, Aurel:** Linear differential equations and the oscillatory property of Maclaurin's cosine series. *Math. Gaz.*, London 33, 26—28 (1949).

Ausgehend von der Tatsache, daß die Teilsummen  $C_n(t) = \sum_{m=0}^n (-t^2)^m / (2m)!$

der Potenzreihe für  $\cos t$  abwechselnd im ganzen unendlichen Intervall  $0 < t < \infty$  größer als  $\cos t$  bzw. kleiner als  $\cos t$  sind, werden allgemeiner bei  $x'' + f(t) \cdot x = 0$  mit  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$  die durch schrittweise Näherungen entstehenden Funk-



tionen

$$x_n(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s) x_{n-1}(s) ds$$

untersucht, wobei von  $x_0(t) = x(0) + x'(0)t$  ausgegangen wird. Ist  $f(t)$  stetig, positiv und monoton wachsend für  $0 < t < \infty$ , so gilt dort  $x_n(t) > x(t)$  für  $n = 2, 4, 6, \dots$  und  $x_n(t) < x(t)$  für  $n = 1, 3, 5, \dots$  Collatz (Hannover).

**Hartman, Philipp and Aurel Wintner: A separation theorem for continuous spectra.** Amer. J. Math. **71**, 650—662 (1949).

Let  $p = p(t) > 0$  and  $q(t)$  be real-valued on  $0 \leq t < \infty$  and consider the differential equation  $(px')' + (q + \lambda)x = 0$ , where  $\lambda$  is a real parameter. Suppose that the equation is of „Grenzpunkt“ type, i. e. that it does not possess two linearly independent solutions  $x(t) \in L^2(0, \infty)$ ; this requirement being satisfied for every  $\lambda$  if it is satisfied for a single  $\lambda$ . [See H. Weyl, Math. Ann., Berlin **68**, 222—260 (1910).] A boundary condition  $(\alpha): x(0) \sin \alpha - p(0) x'(0) \cos \alpha = 0$  ( $\alpha$  a real number) determines therefore an eigenvalue problem in  $L^2(0, \infty)$ . The following separation theorem is proved: If, for the boundary condition  $(\alpha)$ ,  $\lambda'$  and  $\lambda''$  ( $\lambda' < \lambda''$ ) are isolated eigenvalues and if the open interval  $(\lambda', \lambda'')$  does not contain any point of the spectrum, then this interval contains exactly one point of the spectrum of the problem for any other boundary condition  $(\alpha')$ ,  $\alpha' \neq \alpha$ . Béla Sz.-Nagy.

**Avakumović, Vojislav G.: Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. I, II.** Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A **1**, 101—113 (1947), A **2**, 223—233 u. serb. Zusammenfassg. 234—235 (1948).

Es handelt sich um die Verallgemeinerung (1)  $y'' = f(x) y^\lambda$  [ $\lambda > 1$  eine Konstante;  $f(x)$  eine gegebene, bei konstantem  $a \geq 0$  für  $x \geq a$  definierte positive und stetige Funktion] der Differentialgleichung  $y'' = y^{3/2} x^{-1/2}$  [vgl. E. Fermi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. **6**, 602—607 (1927); L. H. Thomas, Proc. Cambridge philos. Soc. **23**, 542—548 (1927); vgl. ferner V. Bush und S. H. Caldwell, A. Sommerfeld, C. Miranda; dies. Zbl. **3**, 268: 4, 393; **8**, 353], mit der man in der Fermischen Statistik Potential und Dichte im Atominnern beschreibt. Unter der Voraussetzung, daß eine Lösung  $y(x)$  von (1) mit (2)  $y(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  existiert, wird das asymptotische Verhalten von  $y(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  genauer untersucht. — Die für  $x > a$  erklärte Funktion  $\varrho(x)$  gehöre der Klasse  $R - O$  an, d. h. sie sei positiv, in jedem endlichen Intervall beschränkt, und es sollen die Konstanten  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ),  $m_\delta$  und  $M_\delta$  ( $0 < m_\delta \leq M_\delta$ ) vorhanden sein, so daß die Ungleichung  $m_\delta \leq \varrho(t x) / \varrho(x) \leq M_\delta$  erfüllt ist für alle  $t$  mit  $\delta < t < 1$  und alle in Betracht kommenden  $x \geq a$ ; weiter sei  $f(x) \geq \varrho(x)$  für hinreichend großes  $x$  und  $y(x)$  eine (2) erfüllende Lösung von (1); dann existiert eine Konstante  $\bar{A} = A(\lambda, m_\delta, M_\delta) > 0$ , so daß  $(x^2 \varrho(x))^\gamma y(x) < \bar{A}$  mit  $\gamma = (\lambda - 1)^{-1}$  für hinreichend großes  $x$  ist. Beim Beweis werden zwei Hilfssätze über Funktionen der Klasse  $R - O$  benutzt (vgl. Verf., dies. Zbl. **11**, 207). Im Satz 2 wird  $y(x)$  in ähnlicher Weise nach unten abgeschätzt. — Im Satz 3 wird vorausgesetzt, daß  $\varrho(x)$  regulär wachsend im Sinne von J. Karamata (vgl. dies. Zbl. **8**, 8) ist. Dies soll heißen, daß  $\varrho(x)$  positiv ist und daß  $\varrho(tx)/\varrho(x)$  bei  $x \rightarrow \infty$  für jedes  $t > 0$  einem Grenzwert  $h(t)$  zustrebt [woraus  $h(t) = t^v$  mit reellem  $v$  folgt]. Es sei nun  $v > 2$ ,  $f(x) \sim \varrho(x)$  [d. h.  $f(x)/\varrho(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ ] und  $y(x)$  eine (2) erfüllende Lösung von (1). Dann ist  $y(x) \sim C(x^2 \varrho(x))^{-\gamma}$ . Dabei ist  $C$  diejenige leicht in  $\lambda$  und  $v$  ausdrückbare Konstante, die sich durch die Forderung ergibt, daß  $y = C x^{-(2+v)\gamma}$  Lösung von  $y'' = x^v y^\lambda$  ist. Die Hauptarbeit beim Beweis verursacht der folgende Hilfssatz: Für die für  $x \geq 0$  zweimal differenzierbare abnehmende und konvexe Funktion  $p(x)$  mit  $p(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$  sei

$$p^2(x) \int_x^\infty \frac{dt}{p^2(t)} > \text{const} \quad \text{und} \quad x^2 \frac{p''(x)}{p(x)} > \text{const}$$

für hinreichend großes  $x$ , ferner  $p''(x) \sim f(x) p^2(x)$ ; ist dann  $y(x)$  eine (2) erfüllende Lösung von (1), so ist  $y(x) \sim p(x)$ . — Der Beweis dieses Hilfssatzes wird eingeleitet durch die Substitution  $y(x) = p(x) z(\varphi(x))$ , wo  $\varphi(x)$  Lösung der Bernoullischen Gleichung  $p \varphi'' + 2p' \varphi' + \alpha p \varphi'^2 = 0$  ( $\alpha > 0$  konstant) ist mit  $\varphi(0) = \xi$  und  $\varphi'(0) = 1/\eta$  ( $\xi$  und  $\eta$  geeignete Konstante). Mit den Abkürzungen  $\chi = p'' z/p \varphi'^2$ ,  $\Omega = f p^2/p''$  geht (1) über in (3)  $z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} - \chi (\Omega z^{\lambda-1} - 1)$ . Daran knüpft Verf. in der zweiten Arbeit an. Man kann den Hilfssatz, wie sein Beweis zeigt, folgendermaßen formulieren. Satz 1<sub>2</sub>: Sei  $\chi > \beta z$  ( $\beta > 0$  konstant) und  $\Omega \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$ , ferner  $z = z(\varphi)$  eine Lösung von (3) mit  $z = o(e^{\alpha\varphi})$  für  $\varphi \rightarrow \infty$ ; dann hat man  $1 > z \rightarrow 1$  für  $\varphi \rightarrow \infty$ . — Das Hauptgewicht der zweiten Arbeit liegt auf einer Verbesserung der Aussage über das asymptotische Verhalten von  $z(\varphi)$ . Unter den Voraussetzungen, daß  $z(\varphi)$  eine Lösung von (3) und  $\chi = \beta z + O(e^{cn\varphi})$ ,  $\Omega = 1 + O(e^{cn\varphi})$ ,  $0 < z = o(e^{\alpha\varphi})$  für  $\varphi \rightarrow \infty$  ist ( $\beta > 0$  konstant;  $n \geq 2$  ganz, konstant;  $2c = \alpha - [\alpha^2 + 4(\lambda - 1)\beta]^{\frac{1}{2}}$ ), schließt der Satz 2<sub>2</sub> auf

$$z = 1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{\nu} (C e^{c\varphi})^{\nu} + O(e^{cn\varphi}) \quad \text{für } \varphi \rightarrow \infty,$$

wobei die  $A_{\nu}$  durch gewisse Gleichungen in  $c, \alpha, \beta, \lambda, \nu, A_{\nu}$  definiert werden und  $C$  eine geeignete Konstante ist. — In einer demnächst erscheinenden Arbeit [vgl. Glas Srp. Akad. Nauka] will Verf. Existenzsätze für die Differentialgleichung (1) untersuchen. Schon jetzt wird ein solcher formuliert: Für eine geeignete Zahl  $w > -2$  sei  $f(x)(x-a)^{-w} < \infty$ , sofern  $x-a$  hinreichend klein,  $f(x)x^{-w} > \text{const} > 0$ , sofern  $x$  hinreichend groß ist; ist dann  $b$  eine vorgegebene positive Konstante, so besitzt (1) eine eindeutige Lösung  $y(x)$ , sofern noch  $y(a) = b$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$  gefordert wird. Daraus ergibt sich z. B., daß die Existenz einer (2)

erfüllenden Lösung  $y(x)$  von (1) aus den übrigen Voraussetzungen des Satzes 3 der ersten Arbeit folgt. Ferner läßt sich damit aus dem Satz 2<sub>2</sub> ein Satz 3<sub>2</sub> ableiten, welcher besagt, daß der Quotient  $y(x)/p(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  dieselbe Darstellung in  $\varphi$  zuläßt wie  $z = z(\varphi)$  im Satz 2<sub>2</sub>, sofern neben anderen Voraussetzungen  $y(x)$  und  $p(x)$  Integrale von (1) mit  $y(x) \rightarrow 0$  und  $p(x) \rightarrow 0$  bei  $x \rightarrow \infty$  sind. Dies wird auf die Differentialgleichung  $y'' = x^v y^{\lambda}$  angewandt, speziell auch in dem physikalisch interessanten Fall  $v = -1/2, \lambda = 3/2$ . Meyer-König (Stuttgart).

Karamata, J.: Sur l'application des théorèmes de nature tauberienne à l'étude des valeurs asymptotiques des équations différentielles. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 93—96 (1947).

Die im vorangehenden Referat gestellte Frage nach dem asymptotischen Verhalten einer (2) erfüllenden Lösung  $y(x)$  von (1) behandelt Verf. mit Hilfe eines früher [vgl. dies. Zbl. 12, 350] aufgestellten Satzes Tauberscher Art: Ist  $F(x)$  von einer Stelle an zweimal differenzierbar, so folgt aus  $F(x) \rightarrow 0$ , daß auch  $x F'(x) \rightarrow 0$  strebt für  $x \rightarrow \infty$ , wenn für geeignete Werte von  $C$  und  $M > 0$  von einer Stelle an  $C x F'(x) + x^2 F''(x) > M$  (oder auch  $< -M$ ) ist. Es sei  $f(x) > C x^{-\theta}$  ( $C, \theta$  konstant,  $C > 0, 0 < \theta < 2$ ). Durch Spezialisierung und wiederholte Anwendung des genannten Satzes ergibt sich für  $x \rightarrow \infty$  die Abschätzung  $y(x) = o(x^{-\theta+\varepsilon})$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , wobei  $\theta = (2-\vartheta)/(\lambda-1)$  ist. Verf. weist darauf hin, daß dieses Resultat nicht so scharf ist wie das von Avakumovič gewonnene [aus dessen Satz 1 nämlich  $y(x) = O(x^{-\theta})$  folgt], daß es ihm vielmehr darauf ankommt zu zeigen, daß und wie man Taubersche Sätze von der Art des zu Hilfe genommenen Satzes bei einer Fragestellung, wie sie hier vorliegt, nutzbar machen kann.

Meyer-König (Stuttgart).

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Sbrana, Francesco: Sugli operatori funzionali multipli. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 34—40 (1949).



Dans ce travail l'A. expose quelques applications aux équations différentielles aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, du type parabolique, de la méthode des opérateurs multiples, développée par l'A. dans des autres travaux surtout pour les équations du type elliptique [v. F. Sbrana, Atti Soc. Ital. Progr. Sci. **21**<sub>II</sub>, 129—138 (1933); Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti, Atti Soc. Sci. Lett. Genova **13**, (1948); et d'autres travaux sous presse dans les „Atti Soc. Sci. Lett. Genova“]. — Par cette méthode on représente la fonction inconnue au moyen d'intégrales impropres de fonctions exponentielles et d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynome ayant les mêmes coefficients de l'équation à résoudre. On étend à ces intégrales multiples un théorème de Sommerfeld et l'on vérifie, à l'aide d'une représentation du zéro, donnée par l'A., qu'elles satisfont effectivement à l'équation donnée. — Dans cette note les calculs sont développés pour l'équation de la chaleur et pour les équations analogues du type  $\partial^n u / \partial x^n - \partial u / \partial y = f(x, y)$ . *F. Pellegrino (Rome).*

**Amerio, Luigi:** Su un metodo di integrazione delle equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Rend. Sem. mat. fisico Milano **18**, 114—123 (1948).

Verf. führt eine auf M. Picone (dies. Zbl. **29**, 295, 296) zurückgehende Integrationsmethode weiter fort unter besonderer Berücksichtigung des Dirichletschen Problems; d. h. es werden Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung

$$(1)^{\circ} \quad E(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

gesucht, die am Rand  $\sigma$  des Definitionsgebietes  $\tau$  vorgeschriebene Werte annehmen, wobei die  $a_{ik}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $f$  Funktionen von  $x_1, \dots, x_m$  sind. Das Lösungsverfahren in seiner bisherigen Form führt unter Benutzung der Greenschen Formel auf zwei Integralgleichungssysteme von Fischer-Riesz, von denen das eine zur Bestimmung der konormalen Ableitung  $\partial u / \partial \nu$  auf  $\sigma$  und anschließend das andere zur Bestimmung von  $u$  in  $\tau$  dient, wobei die Kenntnis zweier auf  $\sigma$  bzw. in  $\tau$  abgeschlossener Folgen von Lösungen der zu (1) adjungierten homogenen Differentialgleichung (2)  $E^*(v) = 0$  sowie die Existenz und Eindeutigkeit von  $u$  vorausgesetzt wird. Unter Verwendung eines geeigneten Vektorbegriffes kann Verf. die beiden Fischer-Rieszschen Systeme in ein einziges zusammenfassen, welches die gleichzeitige Bestimmung von  $\partial u / \partial \nu$  und  $u$  gestattet. Falls die Koeffizienten von (1) sich in einer Umgebung  $\tau'$  von  $\tau$  fortsetzen lassen und daher die Fundamentallösung von (1) in  $\tau'$  existiert, d. h. eine Funktion  $F(N, R)$ , die als Funktion von  $N$  der Gleichung (2) und als Funktion von  $R$  der Gleichung (1) genügt, wenn ferner nur Lösungen einer Klasse  $I'$  betrachtet werden, die unter Benutzung der zwei Greenschen „Fundamentalformeln“ passend definiert wird, kommt Verf. u. a. zu folgendem Resultat: Die unbekannten Funktionen  $u$  in  $\tau$  und  $\partial u / \partial \nu$  auf  $\sigma$  werden als Komponenten eines Vektors  $\mathfrak{G}$ , die Funktionen  $-E^*(w_r)$  in  $\tau$  und  $w_r$  auf  $\sigma$  als Komponenten eines Vektors  $\mathfrak{N}_r$  aufgefaßt, wobei  $w_r$  folgendermaßen gewählt werden kann:  $w_r = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$  ( $\alpha_i = 0, 1, \dots$ ). Dann genügt  $\mathfrak{G}$  dem System (3)  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_r) = \int_{\sigma} u (\partial w_r / \partial \nu - L w_r) d\sigma - \int_{\tau} f w_r d\tau$  mit  $L = \sum \cos(n x_i) \{b_i - \sum \partial a_{ik} / \partial x_k\}$ . Wenn das Eindeutigkeitstheorem für die Lösungen von (1) gilt, so ist  $\{\mathfrak{N}_r\}$  abgeschlossen und liefert die eindeutige Lösung. Gilt dieses Theorem nicht, so sind die Eigenlösungen die zur Folge  $\{\mathfrak{N}_r\}$  orthogonalen Vektoren. Falls das Dirichletsche Problem keine Lösung besitzt, so ist dies auch für das System (3) der Fall. *M. J. de Schwarz (Roma).*

**Faedo, Sandro:** Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. 1, 1—41 (1949).

Verf. behandelt die Ausbreitungsgleichung

$$L(u) = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt} + a_3 u_x + a_4 u_t + a_5 u = f$$

mit  $a_2 > 0$ , wobei die  $a_i$  und  $f$  im Halbstreifen  $(S)$   $0 \leq x \leq c$ ,  $t \geq 0$  definierte Funktionen von  $x$  und  $t$  sind unter den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = g(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g_1(x)$  ( $0 \leq x < c$ ) und den Randbedingungen  $u(0, t) = f_1(t)$ ,  $u(c, t) = f_2(t)$  ( $t \geq 0$ ). Zunächst wird gezeigt, daß, wenn die  $a_i$  und  $\partial a_1 / \partial x$ ,  $\partial a_2 / \partial x$  in  $(S)$  stetig sind, höchstens eine — stetige und zweimal stetig differenzierbare — Lösung des Problems existiert. Unter gewissen Kompatibilitätsbedingungen für die Funktionen  $g(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  kann das Problem immer auf den Fall zurückgeführt werden, in dem diese Funktionen verschwinden. Um die Lösung der in dieser Weise umgeformten Differentialgleichung zu konstruieren, bedient sich Verf. der sogenannten Momentenmethode, d. h. er setzt Näherungsfunktionen in der Form  $v_n(x, t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \varphi_i(x)$  an, wobei die Koeffizienten  $c_{in}(t)$  folgendem System von  $n$  linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\int_0^c \{L(v_n) - f\} \varphi_s(x) dx = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen  $c_{in}(0) = 0$ ,  $c'_{in}(0) = 0$  genügen und die  $\varphi_i(x)$  unter den Systemen zu wählen sind, die nach der sogenannten Variationsmethode [M. Piccone, Rend. Accad. Sci. fisic. mat., Napoli, IV. S. 6, 217—235 (1936); dies. Zbl. 16, 176; Verf.: Ulteriori contributi alla teoria del metodo variazionale, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. Fisic. Mat., II. S. 12, 99—116 (1943)] als Entwicklungsfunktionen zugelassen sind. Z. B. kann  $\varphi_i(x) = \sin(\pi i x/c)$  gewählt werden, wie es Verf. beim Existenzbeweis für die Lösung  $u(x, t)$  tut, unter Verwendung von in der Variationsrechnung üblichen Gedankengängen (Theorem von G. Ascoli). Es folgen noch Aussagen über die Existenz und absolute Stetigkeit der Ableitungen 2. und 3. Ordnung sowie Abschätzungen des absoluten Betrages von  $u(x, t)$  und seiner Derivierten. Wie auch die Entwicklungsfunktionen  $\varphi_i(x)$  gemäß der Variationsmethode gewählt sind, immer konvergieren die damit gebildeten Näherungsfunktionen  $u_n(x, t)$  in jedem Rechteck  $0 \leq x \leq c$ ,  $0 \leq t \leq T$  gleichmäßig gegen die Lösung  $u(x, t)$ .

M. J. de Schwarz (Roma).

Riesz, Marcel: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta math., Uppsala 81, 1—223 (1949).

L'A. apporte ici une contribution originale et essentielle à la discussion du problème de Cauchy, posé pour les équations du type hyperbolique: on verra, toutefois, que la méthode peut rendre des services dans l'analyse du cas elliptique. — Au chap. I, l'A. rappelle certaines propriétés de l'intégrale de Riemann-Liouville:

$$(1) \quad I^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt.$$

Plaçons-nous, pour simplifier, dans le champ réel et admettons que  $a > -\infty$ ;  $f(t)$  étant une fonction continue,  $\alpha$  un paramètre. Le second membre de (1) converge pour  $\alpha > 0$  et définit, comme on le sait, une fonction holomorphe de  $\alpha$  dans le domaine  $\alpha > 0$ . Mais si  $f^{(n)}(x)$  est bornée et continue ( $n \leq p$ ), on a la formule:

$$I^\alpha [f(x)] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} (x-a)^{\alpha+k} + I^{\alpha+n} [f^{(n)}(x)]; \quad n \leq p,$$

qui définit le prolongement analytique de  $I^\alpha [f(x)]$  pour  $\alpha > -p$ . Dans la suite, nous attribuerons toujours à l'opérateur  $I^\alpha [f(x)]$  — et aux opérateurs analogues — le sens ci-dessus pour  $\alpha < 0$ ; il est entendu que des précautions supplémentaires sont à prendre pour justifier ces définitions dans le voisinage des valeurs entières et non positives de  $\alpha$ ; on arrive ainsi aux relations:  $I^{-n} [f(x)] = f^{(n)}(x)$ ;  $I^0 [f(x)] = f(x)$ . L'A. peut alors justifier la formule de composition: (2)  $I^\beta \{I^\alpha [f(x)]\} = I^{\alpha+\beta} [f(x)]$ . — L'idée de l'A. consiste à construire pour chaque type d'équation aux dérivées partielles un opérateur jouissant, en gros, des mêmes propriétés que (1) et assujéti en outre, à satisfaire à des équations aux dérivées partielles convenables. — Au chap. II, l'A. définit divers opérateurs de cette nature, susceptibles de servir dans l'étude des équations elliptiques; cette partie du mémoire se présente plutôt comme l'amorce d'une vaste recherche et ses



liens avec le corps de l'ouvrage paraissent lâches. Voici quelques unes des définitions de l'A. Appelons  $\Omega$  l'espace euclidien (entier) à  $m$  dimensions, muni de la métrique euclidienne:

$r_{PQ}^2 = \sum_1^m (x_i - \xi_i)^2$ ,  $r_{PQ}$  étant la distance de deux points  $P(x_i)$  et  $Q(\xi_i)$ . L'A. prouve que l'opérateur:

$$(3) \quad I^\alpha[f(x)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} d\tau_Q, \quad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{m/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((m-\alpha)/2)}$$

[où  $f(Q)$  est la densité cubique de la matière au point courant  $Q$ , assujettie à diverses conditions de régularité, et où  $d\tau_Q$  est l'élément de volume en  $Q$ ] possède les propriétés énumérées ci-dessus; on a, de plus, en désignant par  $\Delta$  le laplacien:  $\Delta\{I^{\alpha+2}[f(P)]\} = -I^\alpha[f(P)]$ . — Si  $\alpha = 2$ , on en tire:  $\Delta I^2 = -f$ , ce qui permet de regarder l'opérateur (3) comme une généralisation du potentiel logarithmique moyennant l'hypothèse:  $\int_\Omega f(Q) d\tau_Q = 0$ . — De même, on peut définir

les potentiels généralisés de simple et de double couche; et l'A. renvoie à d'autres publications pour justifier l'utilité des notions ainsi introduites dans la théorie des équations du type elliptique. — Le chap. III nous ramène au cas hyperbolique. — L'A. expose d'abord les principes de la géométrie lorentzienne de  $\Omega$  [c'est-à-dire de  $\Omega$  doué de la métrique:

$$r_{PQ}^2 = (x_1 - \xi_1)^2 - \sum_2^m (x_i - \xi_i)^2].$$

Soient:  $C^P$ , la nappe rétrograde du cône de lumière;  $r_{PQ} = 0$ , de sommet  $P$ ;  $D^P$ , le domaine limité par  $C^P$ ;  $S$  une variété à  $m-1$  dimensions (surface), assez régulière de  $\Omega$  (telle, notamment, que l'intersection de  $r_{MQ} = 0$  ( $M \in S$ ) avec le plan tangent à  $S$  en  $M$ , se réduit à  $M$ );  $S^P$  la portion de  $S$  intérieure à  $D^P$ ;  $D_S^P$ , la portion de  $D^P$  limitée par  $S^P$ ;  $n$ , le vecteur de la conormale — ou normale lorentzienne — dûment orientée de  $S$ . L'A. construit alors la géométrie tant finie que différentielle dans  $\Omega$  lorentzien, en définissant les notions telles que les produits scalaires de vecteurs, dérivées d'une fonction scalaire dans une direction, élément d'aire lorentzien  $dS$  de  $S$ , élément de volume lorentzien d'une variété à un nombre quelconque de dimensions; etc. — L'A. peut, des lors, développer d'une manière synthétique la théorie d'une transformation analogue à celle de Green: il aboutit ainsi à l'identité:

$$(4) \quad \int_{D_S^P} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau_Q = - \int_{S^P} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions scalaires assez régulières, où  $d\tau_Q$  est l'élément lorentzien de volume

et où:  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} - \sum_2^m \frac{\partial}{\partial x_i^2}$  gardera désormais le sens de l'opérateur des ondes. Posons alors:

$$H_m(\alpha) = \pi^{(m-2)/2} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right), \quad (5) \quad I^\alpha[f(P)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} d\tau_Q,$$

$$I_*^\alpha[f(P), g(P), h(P)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} d\tau_Q + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} \left[ g(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q) \frac{dr_{PQ}^{\alpha-m}}{dn} \right] dS.$$

L'opérateur (5) vérifie encore les propriétés imposées au symbole  $I^\alpha$ . Faisons alors  $v = r_{PQ}^{\alpha+2-m}/H_m(\alpha+2)$  dans (4); il viendra:

$$(6) \quad I^\alpha[u(P)] = I_*^{\alpha+2} \left[ \Delta u, \frac{du}{dn}, u(P) \right].$$

— Nous omettons d'énoncer les hypothèses de régularité moyennant lesquelles les conclusions précédentes sont valables; nous ne pouvons, d'autre part, songer à analyser ici le détail des minutieuses discussions de l'A. destinées 1) à préciser, au moyen de prolongements convenables, le sens de chacun des symboles introduits pour toutes les valeurs utiles de  $\alpha$  et de  $\beta$  [Cf (2)], 2) à fixer les conditions de dérivabilité sous le signe  $\int$  de  $I^\alpha$ . Il s'agit là de raisonnements très fins, exigeant des calculs délicats et laborieux. — L'A. est désormais en mesure d'aborder (chapitre IV) la solution du problème de Cauchy,

qui revient à déterminer  $u(P)$ , solution de  $\Delta u = f(P)$  connaissant  $u = h(Q)$ ,  $\frac{du}{dn} = g(Q)$ ,  $Q \in S$ , ( $f, h, g$  étant des données). Comme  $I^0[u] = u$ , on a encore, en posant  $\alpha = 0$  dans (6): (7)  $u(P) = I_*^2[f, g, h]$ . — Tout revient, dès lors, à vérifier a posteriori que (7) fournit bien la valeur cherchée de  $u(P)$ . L'A. donne à ce sujet quelques indications sommaires (Cf. le § 60), en notant que sa méthode n'exige que la vérification des conditions aux limites, l'équation  $\Delta u = f$  étant satisfaite d'elle-même. — L'A. compare ensuite son procédé de résolution à celui

de ses prédécesseurs, en tête desquels il faut citer Volterra et Hadamard. L'inconvénient des formules de l'A. semble consister en ce que les intégrales figurant au second membre de (7) ne permettent guère le calcul effectif de  $u(P)$ , tout au moins dans le cas général; ces opérateurs n'ont de sens, rappelons-le, que moyennant les prolongements analytiques convenables — que l'A. d'ailleurs réussit à expliciter dans une certaine mesure. En revanche, la formule (7) se prête d'une manière très remarquable à l'étude qualitative, théorique des solutions. En particulier, elle est valable quelque soit la parité de  $m$  ce qui n'est pas le cas des solutions dues à Hadamard. Signalons, toutefois, que le cas  $m = 2$  soulève des difficultés spéciales que l'A. élucide avec soin. — D'autre part, les expressions de l'A. offrent le caractère invariantif qui les met à l'abri des critiques que Hadamard formulait à l'égard des solutions classiques de Kirchhoff et Volterra (cas  $m = 3$  et  $m = 4$ ); celles-ci font intervenir, en effet, des singularités étrangères au problème. — Enfin, (7) permet une discussion aisée du rôle que joue la parité de  $m$ ; notamment, l'incidence de cette parité sur la validité du principe de Huygens, la mise en évidence du phénomène de diffusion. — Ce qui précède montre bien l'intérêt qu'offrent les solutions explicites du problème, ne fût-ce que pour des valeurs particulières de  $m$ . Citons dans cet ordre d'idées les formules résolutives de l'A. pour  $m = 3$ , puis celles valables dans le cas de  $m = 4$ , formées au moyen des potentiels retardés — que l'A. retrouve à l'aide de ses méthodes. Notons aussi — en anticipant sur la suite — que l'A. consacre le chap. V de son travail à l'étude approfondie du cas  $m = 4$ . Il arrive à une solution explicite du problème d'une rare élégance :

$$u(P) = \frac{1}{\pi} \int_{S^P} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u - \frac{d_v u}{dR} \right] dS,$$

ou  $R_1, R_2$  sont des longueurs convenables et ou  $du/dR$  représente la dérivée de  $u$  prise suivant la direction  $r$  choisie d'une manière appropriée. Faute de place, nous ne pouvons préciser davantage. — Le chap. IV se termine par l'étude des cas où la surface  $S$ , portant les données frontières, ne remplit plus les conditions énumérées ci-dessus: citons la discussion relative aux surfaces  $S$  caractéristiques (c. a. d. telles que la normale en chaque point de  $S$  est isotrope — au sens lorentzien). Ici, les résultats de l'A. sont sommaires; seul le cas où  $S$  se réduit au cône caractéristique est étudié à fond. — Les deux derniers chapitres, bien que copieux, seront analysés très brièvement. L'un est consacré à la théorie relativiste de l'électron, l'autre à l'extension des méthodes de l'A. au cas des équations hyperboliques à coefficients variables. L'A. construit en vue de cette généralisation une géométrie lorentzienne des espaces de Riemann et compare son procédé à celui de Hadamard. — Le mémoire est rédigé d'une manière très accessible. Voici donc un travail d'une grande portée, d'un contenu très riche en aperçus nouveaux, qui peut aussi être utilisé comme une monographie du problème de Cauchy. *J. Kravtchenko.*

**Miranda, C.: Sull' approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 4, 530—533 (1948).

Die Approximation einer in einem abgeschlossenen beschränkten Bereich  $D$  stetigen, im Innern harmonischen Funktion, geschieht hier durch eine Linearkombination von Kugelfunktionen (mit auf- und absteigenden Potenzen) nach je einem beliebigen Punkt in einem der (endlichvielen) Gebiete von  $CD$ . Die Arbeit bezieht sich u. a. auf Arbeiten von Ghika [C. r. Acad. Sci., Paris 199, 560—562 (1934)], Fichera (dies. Zbl. 29, 297) sowie eine Arbeit des Verf. zum Dirichletschen Prinzip [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 3, 55—59 (1947)].

*H. Hornich (Graz).*

### Variationsrechnung:

**Giuliano, Landolino: Sulla continuità degli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni.** Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. 1, 161—187 (1949).

Verf. setzt seine Untersuchungen (dies. Zbl. 30, 33) über die Kurvenintegrale der Variationsrechnung

$$I_C = \int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$$

fort und gibt einen Stetigkeitssatz für das Integral  $I_C$  über eine absolut stetige Kurve  $C_0$ :  $y = y_0(x)$ ,  $z = z_0(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), für den Fall, daß die Kurve  $C_0$  nicht vollständig im Innern des Definitionsbereichs  $A$  der Funktionen  $M(x, y, z)$ ,  $N(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$  enthalten ist. Für die genaue Formulierung der Voraus-



setzungen, unter denen Verf. die ernsten Schwierigkeiten des Beweises überwunden hat, verweisen wir auf die Arbeit selbst. Ein interessantes Beispiel hebt die Notwendigkeit der vom Verf. gemachten Voraussetzungen hervor. *S. Cinquini.*

**Viola, Tullio:** Sulla ricerca delle estremanti d'un integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. 1, 101—160 (1949).

Verf. setzt seine frühere Untersuchung (dies. Zbl. 20, 307; 22, 234) über Integrale in der gewöhnlichen Form  $I = \int_a^b f(x, y, y') dx$  fort, indem er ein neues analytisches Verfahren entwickelt. Es sei  $A$  die Menge der Funktionen  $y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), die samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetig sind und für jedes Wertepaar

$x_1, x_2$  von  $(a, b)$  der Ungleichung  $|y'(x_1) - y'(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} L(x) dx$  genügen, worin  $L(x)$  eine quasistetige, nicht negative und integrierbare Funktion auf  $(a, b)$  ist.  $A^0$  sei die Menge, die aus denjenigen Funktionen  $y = \varphi(x)$  von  $A$  besteht, die man erhält, wenn man  $(a, b)$  in eine endliche Anzahl von Intervallen unterteilt und in diesen abwechselnd  $\varphi''(x) = +L(x)$ ,  $\varphi''(x) = -L(x)$  setzt.  $E$  sei die Menge, die aus allen und nur den Funktionen von  $A$  besteht, für die  $p_i \leq y(x_i) \leq P_i$ ,  $p'_j \leq y'(x'_j) \leq P'_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) gilt; dabei sind die  $x_i, x'_j$  ( $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ ,  $a \leq x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n \leq b$ ;  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  oder  $m \geq 2$ ,  $n = 0$ )  $m + n$  Punkte (wobei nicht ausgeschlossen ist, daß einige oder alle  $x_i$  mit den  $x'_j$  zusammenfallen können), und die  $p_i, P_i, p'_j, P'_j$  sind  $2(m + n)$  Konstante. In der vorliegenden Arbeit gelangt Verf. zu einer hinreichenden Bedingung dafür, daß das Integral  $I$  in  $E$  sein absolutes Maximum (oder sein absolutes Minimum) annimmt, im Zusammenhang mit einer gewissen Funktion von  $E^0 = A^0 E$ .

*S. Cinquini (Pavia).*

**Bilimovitch, Anton:** Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 49—57 (1947).

Si considera la forma lineare  $\Phi = \sum_{i=1}^n X_i dx_i$ , ove  $X_1, \dots, X_n$  sono funzioni delle  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ , e si definiscono le sue derivate parziali pure

$$\frac{\partial^0 \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - dX_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

le quali hanno lo stesso ufficio delle derivate parziali di una funzione di più variabili. — Di esse l'A. fa applicazione al problema di Calcolo delle variazioni relativo all'integrale

$I = \int_a^b f(x, y, y') dx$  quando si consideri la classe delle funzioni passanti per i punti  $(a, y_a)$   $(b, y_b)$ , pervenendo alla seguente regola per la determinazione dell'estremo di  $I$ : Considerato l'integrale di Hilbert corrispondente a  $I$

$$J = \int_a^b \left[ f(x, y, k) + (y' - k) \frac{\partial f}{\partial k} \right] dx,$$

e posto

$$\Phi = \left[ f(x, y, k) - k \frac{\partial f}{\partial k} \right] dx + \frac{\partial f}{\partial k} dy,$$

si uguagliano a zero le derivate parziali pure di  $\Phi$  rispetto alle variabili  $x, y, k$ .

*S. Cinquini (Pavia).*

**Franchis, Franco de:** Sur les trajectoires des problèmes variationnels. Bull. Sci. math., II. S. 72<sub>L</sub>, 150—160 (1948).

Nello spazio  $(x_1, \dots, x_n)$  si considerano  $\infty^{2n-1}$  traiettorie definite sotto forma variazionale dalla condizione  $\delta \int L'(x, dx, E) = 0$  (1), ove  $L'(x, dx, E)$  è una

funzione nota dipendente dalle variabili  $x_0$ , dai differenziali  $dx_0$  e dal parametro  $E$ , la quale è omogenea di grado uno nei differenziali  $dx_0$  ed è continua insieme con le proprie derivate parziali dei primi due ordini. — Introdotta una nuova variabile  $t$ , l'A. prova che la legge di percorso delle traiettorie definita dall'equazione  $dt = \partial L(x, dx, E) / \partial E$  (2) è l'unica legge che si possa associare alla condizione (1)

per essere equivalente a una condizione variazionale della forma  $\delta \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt = 0$ ,

ove  $t_1$  e  $t_2$  sono limiti fissi e la condizione (1) caratterizza le traiettorie corrispondenti al fascio relativo al valore  $E$  della costante delle forze vive; la funzione lagrangiana  $L$  dipendente dalle variabili  $x_0$  e dalle derivate  $\dot{x}_0 = dx_0/dt$  è univocamente determinata dalla funzione  $L'(x, dx, E)$ . — L'A. fa applicazione di tale risultato alla legge di gravitazione della teoria della relatività dedotta dal  $ds^2$  di Schwarzschild.

S. Cinquini (Pavia).

### **Integralgleichungen. Integraltransformationen:**

Parodi, Maurice: Sur une conséquence des propriétés de l'équation intégrale de Schlömilch. Bull. Sci. math., II. S. 72<sub>I</sub>, 7—8 (1948).

Folgende Integralgleichung wird gelöst:

$$\varphi(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi\left(\frac{p}{\sin \theta}\right) d\theta.$$

$\varphi(p)$  bedeutet eine gegebene Funktion von der Form  $a + \mu(p)/p$  [ $a$  ist eine Konstante,  $\mu(p)$  eine holomorphe Funktion, welche beschränkt ist in jeder Halbebene  $\Re(p) > \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig], und  $\psi$  ist die unbekannte Funktion. Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$\psi(p) = a - p \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dq} \left( \frac{\mu(q)}{q} \right)_{q=(p/\sin \theta)} \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Verf. benutzt die Laplacesche Transformation. Die betrachtete Gleichung und die vom Verf. angegebene Lösung ist die Laplacesche Transformierte der Schlömilch'schen Integralgleichung (Whittaker - Watson: Modern Analysis. 1946. p. 229) bzw. ihrer Lösung.

St. Fenyö (Budapest).

• Jaeger, J. C.: An introduction to the Laplace transformation, with engineering applications. (Methuen's Monographs on physical Subjects.) London: Methuen and Co. Ltd. 1949. VIII, 132 p. 7s. 6d. net.

Bei dieser Einführung handelt es sich um eine möglichst elementare Darstellung der  $L$ -Transformation, vor allem bestimmt für Studierende der Physik und Elektrotechnik. Da nur die einfachsten Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung ohne Funktionentheorie vorausgesetzt werden, sind beispielsweise nur die einfachsten Faltungssätze, und zwar ohne Beweis wiedergegeben. — Inhaltsverzeichnis: I. Fundamental Theory, S. 1—25, II. Electric Circuit-Theory, S. 26—81, III. Further Theorems and their Applications, S. 82—99, IV. Partial Differential Equations, S. 100—131. Angesichts der knappen und klaren Darstellung der einfachsten Sätze über die  $L$ -Transformation, illustriert durch viele gutgewählte Beispiele aus der Technik, dürfte das Büchlein seinem Zwecke gerecht werden, eine erste Einführung in die  $L$ -Transformation für technisch interessierte Studierende zu geben.

Saxer (Zürich).

Avakumović, Vojislav, G.: Contribution à la théorie des intégrales de Laplace. Acad. Serbe Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 91—105 u. serb. Zusammenfassg. 105—107 (1948).

Es sei  $J(s) = s \int_0^\infty e^{-su} A(u) du$  konvergent für  $\Re(s) > 0$  und gleichmäßig be-

schränkt in einem konvexen Bereich  $D_k$ , der die imaginäre Achse von der Ordnung  $k-1$  ( $k \geq 1$ ) berührt. Die Grenzfunktion von  $J(s)$ , wenn der zugehörige Punkt



$P(s)$  gegen die Peripherie von  $D_k$  strebt, werde mit  $Q(t)$  bezeichnet. Es sei

$$H(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{t} Q(t) dt.$$

Verf. gibt verschiedene Sätze über das asymptotische Verhalten von  $H(y)$  und  $A(u)$ , wenn das eine bekannt ist. — Beispiel: Wenn

$$H(y) = Q(0) + o(y^{-\beta}), \quad y \rightarrow \infty, \text{ so gilt } A(u) = Q(0) + o(u^{-\beta}), \quad u \rightarrow \infty,$$

sofern  $A(u)$  eine gewisse Konvergenzbedingung erfüllt.

Saxer (Zürich).

**Lebedev, N. N.:** Ein Analogon zum Parsevalschen Satz für eine Integraltransformation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 653—656 (1949) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Integraltransformation

$$G(\tau) = \int_0^\infty g(x) p(x, \tau) dx; \quad g(x) = \int_0^\infty G(\tau) p(x, \tau) d\tau,$$

wo  $p(x, \tau) = \pi^{-1} (2x^{-1} \tau \operatorname{sh} \pi \tau)^{\frac{1}{2}} K_{i\tau}(x)$  und  $K_\nu(x)$  die Macdonaldsche Funktion bedeutet. Satz: Wenn  $g(x) x^{-\frac{1}{2}} \in L(0, \infty)$  und  $g(x) \in L^2(0, \infty)$ , dann

$$\int_0^\infty G(\tau)^2 d\tau = \int_0^\infty g(x)^2 dx. \quad \text{Der Beweis ist auf die Relation}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\infty G(\tau)^2 (\operatorname{ch} \pi \delta \tau)^{-1} d\tau = \int_0^\infty G(\tau)^2 d\tau$$

und auf eine Formel von A. L. Dixon und W. L. Ferrar [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 4, 193—208 (1933); dies. Zbl. 7, 412] gegründet.

Gál (Paris).

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Šilov, G. E.:** Über reguläre, normierte Ringe. Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov Nr. 21, 118 S. (1947) [Russisch].

**Freundlich, Marianne:** Completely continuous elements of a normed ring. Duke math. J. 16, 273—283 (1949).

In einer kommutativen Banachalgebra  $R$  werden vollstetige Elemente betrachtet, d. h. solche  $r$ , für die jede beschränkte Menge  $B$  in eine Menge  $rB$  mit kompakter Hülle abgebildet wird. Die Riesz-Banachschen Sätze übertragen sich unmittelbar darauf und ergeben eine Reihe algebraischer Resultate, z. B.: Ist  $R$  irreduzibel, so liegt jedes vollstetige Element im Radikal von  $R$ . Ist  $R$  irreduzibel und gilt  $J = J^2$  für alle abgeschlossenen Ideale in  $R$ , so ist kein Hauptideal von  $R$  abgeschlossen. Einige Aussagen über schwach vollstetige Elemente werden ebenfalls abgeleitet.

G. Köthe (Mainz).

**Godement, Roger:** Sur la transformation de Fourier dans les groupes discrets. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 627—628 (1949).

L'A. désigne par  $G$  un groupe discret,  $\Delta$  un sous-groupe abélien de  $G$ , par  $L$  l'ensemble des  $f \in C^G$  nulles en dehors d'un ensemble fini, par  $L^2$  l'espace de Hilbert formé par les  $f \in C^G$  telles que  $\sum_{s \in G} |f(s)|^2 < \infty$ ,  $U_s f(x) = f(s^{-1}x)$  et  $V_s f(x) = f(xs)$  les représentations régulières de  $G$  dans  $L^2$ . Si  $\chi \in \operatorname{Hom}(\Delta, T)$ , on pose

$$\varphi_{f,g}(\chi) = \sum_{\delta \in \Delta} (V_\delta f, g) \chi(\delta).$$

A tout  $\chi \in \operatorname{Hom}(\Delta, T)$ , on peut associer un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}_\chi$ , une application  $f \rightarrow f_\chi$  de  $L$  dans  $\mathfrak{H}_\chi$  et une représentation unitaire de  $s \rightarrow U_{\chi;s}$  de  $G$  dans  $\mathfrak{H}_\chi$  telles que  $\varphi_{f,g}(\chi) = (f_\chi, g_\chi)$  et  $U_{\chi;s} f_\chi = (U_s f)_\chi$ . On obtient ainsi une décomposition de la représentation  $\{L^2, U_s\}$  en somme continue de représentations  $\{\mathfrak{H}_\chi, U_{\chi;s}\}$  deux à deux distinctes. Pour que les  $(\mathfrak{H}_\chi, U_{\chi;s})$  soient irréductibles, il faut et

il suffit que toute classe à gauche (mod.  $\Delta$ ),  $\neq \Delta$ , rencontre une infinité de classes à droite (mod.  $\Delta$ ) distinctes.  $\Delta$  est alors un sous-groupe abélien maximal de  $G$ ; dans  $L^2$ , le sous-anneau d'opérateurs engendré par les  $V_\delta$  ( $\delta \in \Delta$ ) est un sous-anneau commutatif maximal du sous-anneau engendré par les  $V_s$ ; l'A. indique un rapport entre ces résultats et ceux de F. I. Mautner (ce Zbl. 29, 305) et Gelfand et Neumark (ce Zbl. 29, 5). On peut, avec ces résultats, réaliser la transformation de Fourier sur le groupe modulaire arithmétique, par exemple. *J. Braconnier.*

**Cohen, L. W. and Casper Goffman: A theory of transfinite convergence.** Trans. Amer. math. Soc. 66, 65—74 (1949).

$\xi^*$  sei eine Ordnungszahl, die nicht als Limeszahl einer transfiniten Folge  $\xi_\eta$  von Ordnungszahlen  $< \xi^*$ ,  $\eta < \eta^* < \xi^*$ , darstellbar ist, z. B. eine reguläre Anfangszahl. Es werden topologische Räume  $S$  betrachtet mit einem Umgebungssystem  $U_\xi(x)$ ,  $\xi < \xi^*$ , das die Eigenschaften hat: 1. Der Durchschnitt aller  $U_\xi(x)$  ist  $x$ , 2. ist  $\xi_1 < \xi_2$ , so ist  $U_{\xi_1}(x) \supset U_{\xi_2}(x)$ , 3. zu jedem  $\eta < \xi^*$  gibt es ein  $\xi(\eta)$  mit  $\eta \leq \xi(\eta) < \xi^*$ , so daß aus  $U_{\xi(\eta)}(y) \cap U_{\xi(\eta)}(x) \neq \emptyset$  stets  $U_{\xi(\eta)}(y) \subset U_\eta(x)$  folgt, 4. ist  $\eta^* < \xi^*$  und folgt aus  $\eta_1 < \eta_2 < \eta^*$ , stets  $U_{\xi\eta_1}(x_{\eta_1}) \supset U_{\xi\eta_2}(x_{\eta_2})$ , so ist  $\bigcap_{\eta < \eta^*} U_{\xi\eta}(x_\eta)$  nicht leer. Eine Folge  $x_\xi$ ,  $\xi < \xi^*$ , in  $S$  heißt fundamental,

wenn zu jedem  $\eta < \xi^*$  ein  $y_\eta \in S$  und ein  $\xi(\eta) < \xi^*$  existiert, so daß aus  $\xi(\eta) \leq \xi < \xi^*$  stets  $x_\xi \in U_\eta(y_\eta)$  folgt.  $x_\xi$  hat dann den Limes  $x$ , wenn zu jedem  $\eta < \xi^*$  ein  $\xi(\eta) < \xi^*$  existiert, so daß  $x_\xi \in U_\eta(x)$  gilt für  $\xi(\eta) \leq \xi$ . Damit ist der Begriff der  $\xi^*$ -Vollständigkeit von  $S$  gegeben.  $S$  ist von der ersten  $\xi^*$ -Kategorie, wenn  $S$  die Vereinigung einer Folge  $N_\xi$ ,  $\xi < \xi^*$ , in  $S$  nirgendsdichter Mengen ist. Es gilt nun, daß jeder  $\xi^*$ -vollständige Raum  $S$  von zweiter  $\xi^*$ -Kategorie ist. Ist  $\mathfrak{E}^*$  die Kardinalzahl von  $\xi^*$ , so heißt  $S$   $\mathfrak{E}^*$ -separabel, wenn die Limeshülle einer Menge von Punkten  $x_\xi$ ,  $\xi < \xi^*$ , gleich  $S$  ist.  $S$  heißt  $\mathfrak{E}^*$ -kompakt, wenn jedes  $M \subset S$  der Mächtigkeit  $\mathfrak{E}^*$  einen Limes in  $S$  hat. Es gilt folgendes Analogon zum Borel-Lebesgueschen Überdeckungssatz: Eine Teilmenge  $M$  eines  $\mathfrak{E}^*$ -separablen  $S$  ist dann und nur dann  $\mathfrak{E}^*$ -kompakt, wenn jede Überdeckung von  $M$  durch offene Mengen eine Teilüberdeckung durch weniger als  $\mathfrak{E}^*$  Mengen enthält. Als Beispiel wird die Ordnungsabschließung eines geeigneten nichtarchimedisch geordneten Körpers von formalen Potenzreihen  $\sum_{\xi < \sigma} a_\xi t^{\alpha_\xi}$  gebracht, die  $a_\xi$  reell, die  $\alpha_\xi$  aus einer nichtarchimedisch geordneten additiven Gruppe von reellen Linearkombinationen von Unbestimmten  $u_\xi$ ,  $\xi < \xi^*$ . *G. Köthe (Mainz).*

**Yood, Bertram: Banach algebras of bounded functions.** Duke math. J. 16, 151—163 (1949).

Ist  $B(S)$  die Banachalgebra aller komplexwertigen beschränkten Funktionen auf  $S$ , so besteht eine eindeutige Beziehung  $x^* \leftrightarrow \mathfrak{A} \leftrightarrow M \leftrightarrow \mu$  zwischen den multiplikativen linearen Funktionalen  $x^*$  auf  $B(S)$ , den maximalen additiven Idealen  $\mathfrak{A}$  des distributiven Verbandes aller Teilmengen von  $S$ , den Maximalidealen  $M$  von  $B(S)$  und den additiven Mengenfunktionen  $\mu$  auf  $S$  mit den Werten 0 und 1, so daß  $\mathfrak{A}$  die Menge aller  $E \subset S$  mit  $\mu(E) = 1$  ist, ferner  $x^*$  dargestellt werden kann als  $x^*(f) = \int_S f(t) d\mu$ ,  $M$  die Menge der Nullstellen von  $x^*$  ist und  $\mathfrak{A}$  das System aller Mengen  $S(f, \varepsilon)$  ist, wobei  $t \in S(f, \varepsilon)$ , wenn  $|f(t)| \leq \varepsilon$  für  $f \in M$ . Dies ist ein Spezialfall des in der Arbeit bewiesenen allgemeinen Satzes über die Menge der Maximalideale der Banachalgebren  $S: B(S)$ , die aus allen beschränkten  $f(t)$  bestehen,  $t$  in der Menge  $S$ ,  $f(t)$  in einer kommutativen  $B^*$ -Algebra  $B(t)$  [zur Definition vgl. C. E. Rickart, Ann. Math., Princeton, II. S. 47, 528—550 (1946)] mit Einheit. Auch in diesem Fall gilt die eindeutige Zuordnung zu den multiplikativen Funktionalen, und es wird für diese eine Integraldarstellung gegeben. Dagegen braucht man zur Charakterisierung der Maximalideale in  $B(S)$  neben einem Maximalideal  $\mathfrak{A}$  des Verbandes der Teilmengen von  $S$  noch eine Äquivalenzklasse des Produktraums



der Räume der maximalen Ideale der  $B(t)$ . Ferner wird das folgende verallgemeinerte Weierstraßtheorem bewiesen: Es sei  $B$  eine kommutative  $B^*$ -Algebra mit der Einheit  $e$  und  $A$  eine  $B^*$ -Teilalgebra mit derselben adjungierten Operation wie  $B$ . Es sei  $P$  eine Teilmenge von  $A$ . Ist  $e \notin A$  bzw.  $e \in A$ , so erzeugt  $P$  bzw.  $P \cup e$  dann und nur dann die Algebra  $A$ , wenn zu jedem  $a \in A$  mit  $a(M_1) \neq a(M_2)$  für zwei Maximalideale  $M_1$  und  $M_2$  aus  $B$  auch ein Element aus  $P$  mit derselben Eigenschaft existiert. Mit diesen Methoden wird ein neuer Beweis für die Stonesche Darstellung distributiver Verbände durch die Menge der bikompakten offenen Teilmengen eines geeigneten lokalbikompakten Hausdorffschen Raumes gegeben und eine Verschärfung des Satzes von Ulam und Tarski [vgl. A. Tarski, Fundam. Math., Warszawa 15, 42—50 (1930)] über die Existenz zweiwertiger Maßfunktionen abgeleitet.

G. Köthe (Mainz).

Milgram, A. N.: Multiplicative semigroups of continuous functions. Duke math. J. 16, 377—383 (1949).

Es seien  $X$  und  $X'$  bikompakte Hausdorffsche Räume,  $\sigma$  ein Isomorphismus der multiplikativen Halbgruppe  $C(X)$  der stetigen reellen Funktionen auf  $X$  mit der entsprechenden Halbgruppe  $C(X')$ . Dann gibt es eine Homöomorphie  $H$  von  $X$  auf  $X'$ , eine positive Funktion  $p(x)$  in  $C(X)$ , eine endliche Anzahl von isolierten Punkten  $x_1, \dots, x_n \in X$  und Automorphismen  $\tau_1, \dots, \tau_n$  der multiplikativen Halbgruppe der reellen Zahlen, so daß für jedes  $f \in C(X)$  gilt, daß

$$\sigma f(H(x)) = \operatorname{sgn} f(x) |f(x)|^{p(x)}$$

für alle  $x \neq x_i, i = 1, \dots, n$  und  $\sigma f(H(x_i)) = \tau_i(f(x_i))$ . G. Köthe (Mainz).

Myers, S. B.: Spaces of continuous functions. Bull. Amer. math. Soc. 55, 402—407 (1949).

Es sei  $X$  ein vollständig regulärer topologischer Raum,  $B(X)$  der Banachsche Raum der reellen beschränkten Funktionen auf  $X$ . Eine Teilmenge  $G$  von  $B(X)$  heißt vollständig regulär auf  $X$ , wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge  $K$  von  $X$  und jedem  $x_0 \in K$  ein  $b \in G$  gibt mit  $b(x_0) = \|b\|$  und  $\sup_{x \in K} |b(x)| < \|b\|$ . Ein Banachscher Raum  $B$  heißt vollständig regulär auf  $X$ , wenn er einem auf  $X$  vollständig regulären, abgeschlossenen Teilraum von  $B(X)$  äquivalent ist. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß  $B$  vollständig regulär auf einem kompakten  $X$  ist unter Verwendung der Resultate einer früheren Arbeit. Ist  $X$  speziell die Einheitskugel eines Hilbertschen Raumes  $H$  beliebiger unendlicher Dimension, so gibt es einen abgeschlossenen reflexiven Teilraum  $L$  von  $B(X)$ , der vollständig regulär über  $X$  und zu  $H$  isomorph ist. Ferner gilt, daß  $X$  dann und nur dann ein endlichdimensionaler separabler metrischer Raum ist, wenn  $B(X)$  einen endlichdimensionalen über  $X$  vollständig regulären Teilraum besitzt.  $X$  ist dann und nur dann separabel und metrisch, wenn  $B(X)$  einen separablen vollständig regulären Teilraum über  $X$  besitzt. Die Ergebnisse beruhen auf Sätzen einer früheren Arbeit des Verf. [Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 132—140 (1948); dies. Zbl. 29, 304].

G. Köthe (Mainz).

Nachbin, Leopoldo: A characterization of the normed vector ordered spaces of continuous functions over a compact space. Amer. J. Math. 71, 701—705 (1949).

$S$  sei ein normierter, halbgeordneter, reeller linearer Raum.  $S$  ist dann und nur dann isomorph einem normierten, halbgeordneten Teilraum des Raumes  $C(E)$  der reellen, stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum  $E$ , wenn jedes Element von  $S$  entweder halbpositiv oder halbnegativ ist ( $x$  heißt halbpositiv, wenn aus  $y \geq x$  stets  $|y| \geq |x|$  folgt, halbnegativ, wenn aus  $y \leq x$  stets  $|y| \geq |x|$  folgt) und die Menge der positiven Elemente von  $S$  abgeschlossen ist. Ist die Bedingung erfüllt, so wird gezeigt, daß  $S$  isomorph der Menge der Funktionen auf der kompakten Menge  $E$  aller positiven linearen Funktionale  $f$  aus  $S$  vom Betrag  $\leq 1$

ist, die durch  $X(f) = f(x)$  für irgendein  $x \in S$  erklärt sind. Wird  $S$  als normierter Vektorverband vorausgesetzt, so ist  $S$  dann und nur dann isomorph einem normierten Teilvektorverband von  $C(E)$ ,  $E$  kompakt, wenn wieder jedes Element von  $S$  halb-positiv oder halbnegativ ist und  $\|x\| \geq \|x \vee (-x)\|$  gilt. *G. Köthe (Mainz).*

**Abdelhay, J.: On a theorem of representation.** Bull. Amer. math. Soc. **55**, 408—417 (1949).

Let  $C$  be the space of all continuous functions  $x(P)$  on a topological space with the norm  $\|x\| = \sup |x(P)|$ . It is observed that the norm may be expressed also by means of the „unilateral“ bound  $\varphi(x) = \min \{0, \inf [x(P)]\}$ . By this latter functional one can, moreover, characterize also the partial ordering of the space  $C$ . — The properties of the functional  $\varphi(x)$  are axiomatized; linear spaces having such a functional are called  $S$ -spaces. These spaces, their compatible metrics and partial orderings are studied, the concept of an  $S$ -ring is introduced; and by its means, a characterization is given of the ring of those bounded continuous real functions of a locally compact Hausdorff space, which vanish at infinity. *Béla Sz.-Nagy.*

**Diliberto, Stephen P.: Special properties of measure preserving transformations.** Bull. Amer. math. Soc. **55**, 554—562 (1949).

L'A. démontre le théorème suivant: Une condition nécessaire et suffisante pour que mouvement fluide défini par le système (1)  $dx_i/dt = P_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où les  $P_i$  sont holomorphes, conserve les volumes euclidiens pour la dimension  $p$  (où  $p$  donné avec  $1 < p < n-1$ ) est que  $\partial P_i / \partial x_j = -\partial P_j / \partial x_i$ ; c'est à dire que le mouvement est un déplacement. — La démonstration est faite directement en exprimant que le groupe de transformations défini par (1) laisse invariant l'élément de volume  $\Sigma(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p)^2$ . Une forme plus générale du théorème est énoncée dans le cas  $n = 3$ . *Reeb (Saverne).*

**Nikolaev, V. F.: Über Operatoren, die Polynome auf Funktionen beziehen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **68**, 9—11 (1949) [Russisch].

Es sei  $U_n^m(f)$  ein linearer Operator, der den Banachschen Raum  $\tilde{C}$  der stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen in der Weise auf sich abbildet, daß der Wert von  $U_n^m(f)$  stets ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $\leq n + m$  ist und die Polynome vom Grad  $\leq n$  invariant bleiben. Verf. zeigt durch elementare Mittel, daß

$$\|U_n^m\| \geq \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| / 2 \|T\| \tilde{c}$$

gilt für  $T(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(m+k)x + b_k \sin(m+k)x\}$ . Einige Anwendungen werden angegeben. Ähnliche Sätze wurden von Lozinskij [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 193—196 (1948)] bewiesen. *G. G. Lorentz (Toronto).*

**Schmeidler, Werner: Über normalisierbare Operatoren.** Arch. Math., Karlsruhe **1**, 340—347 (1949).

Eine endliche Matrix  $A$  wird linksnormalisierbar genannt, wenn sie in der Form  $A = DL$  darstellbar ist, wobei  $D$  Hermitesch und positiv definit ist und  $L$  der Bedingung  $LDL^* = L^*DL$  genügt. Ist  $A = LD$ , so heißt  $A$  rechtsnormalisierbar. Es wird gezeigt, daß jede linksnormalisierbare Matrix auch rechtsnormalisierbar ist und umgekehrt, und daß genau diese Matrizen die Eigenschaft haben, zu Diagonalmatrizen ähnlich zu sein. Diese Begriffsbildungen lassen sich auf beschränkte lineare Transformationen des Hilbertschen Raumes übertragen, nur muß man dann die Existenz und Beschränktheit von  $D^{-1}$  eigens voraussetzen. *Béla Sz.-Nagy.*

**Levitan, B. M.: Korrektur zur Arbeit „Verallgemeinerte Operationen der Verschiebung und unendliche hyperkomplexe Systeme“.** Mat. Sbornik, n. S. **24** (66), 501—502 (1949) [Russisch].

Betrifft die in Mat. Sbornik, n. S. **17** (59), 9—44 (1945) erschienene Arbeit.



## Praktische Analysis:

**Turing, A. M.: Rounding-off errors in matrix processes.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 287—308 (1948).

Verf. betrachtet zunächst eine Reihe bekannter direkter Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme bzw. zur Berechnung der Kehrmatrix unter dem übergeordneten Gesichtspunkt der „Dreiecksauflösung“, d. i. der Zerlegung der  $n$ -reihigen Koeffizientenmatrix  $\mathfrak{A}$  in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen, so insbesondere die Gaußsche Elimination, das Jordan- und das „unsymmetrische Cholesky-Verfahren“ (= Verfahren von Banachiewicz, vgl. Arbeit des Ref., dies. Zbl. **31**, 314). Mit Hilfe der Norm  $N(\mathfrak{A}) = (\text{Spur } \mathfrak{A}'\mathfrak{A})^{\frac{1}{2}}$  und des Maximalkoeffizienten  $M(\mathfrak{A}) = \text{Max } |a_{ij}|$  werden sodann zwei Kennzahlen  $n^{-1} N(\mathfrak{A}) N(\mathfrak{A}^{-1})$  und  $n M(\mathfrak{A}) M(\mathfrak{A}^{-1})$  für die „Bösartigkeit“ (ill-condition) einer Matrix (eines Gleichungssystems) hinsichtlich der Empfindlichkeit der numerischen Auflösung gegen Abrundungsfelder angegeben. Für Auflösungsergebnis (bei der Gauß-Elimination) und Kehrmatrix (bei Jordan und Cholesky-Banachiewicz) werden in Weiterführung einer Arbeit von Neumann und Goldstine (dies. Zbl. **31**, 314) Abschätzungen der durch Abrundungen entstehenden Fehler, vornehmlich unter Benutzung der Größe  $M(\mathfrak{A}^{-1})$ , durchgeführt. Insbesondere wird gezeigt, daß bei der Gauß-Elimination bei Beachtung der üblichen Vorsichtsmaßregeln (Auswahl des betragsgrößten Spaltenkoeffizienten zum Leitelement) im allgemeinen auch bei schlechtgearteter (ill-conditioned) Matrix nicht, wie Abschätzungen von Hotelling [Ann. math. Statist., Baltimore Md. **14**, 34 (1943)] befürchten lassen, ein exponentielles Anhäufen der Abrundungsfehler eintritt. Dies ist allenfalls bei schlechtgearteten Gleichungen, jedoch auch bei ihnen nur unter ganz bestimmten, selten zutreffenden Bedingungen möglich. — Besonders vorteilhaft in Arbeitsaufwand und Abrundungsfehler erweist sich infolge Auflaufenlassen der Zwischenprodukte in der Rechenmaschine das Verfahren von Cholesky-Banachiewicz. Hier ist bei Berechnung der Kehrmatrix das Hauptglied für den maximalen Fehler gleich  $n^2 \varepsilon [M(\mathfrak{A}^{-1})]^2$  mit dem Betrag  $\varepsilon$  der maximalen Abweichung der Matrix  $\mathfrak{A}$  vom Produkt der beiden Dreiecksmatrizen, in die sie zerlegt wird. R. Zurmühl (Darmstadt).

**Redheffer, Raymond: Errors in simultaneous linear equations.** Quart. appl. Math. **6**, 342—343 (1948).

Für das Gleichungssystem  $\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\nu} = b_{\mu}$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ) möge die Näherungslösung  $x_{\nu} + E_{\nu}$  die rechten Seiten  $b_{\mu} + e_{\mu}$  liefern. Dann folgt aus  $\sum_{\sigma=1}^n (\sum_{\nu=1}^n a'_{\sigma\nu} a_{\nu\sigma}) E_{\sigma} E_{\sigma} = \sum_{\mu=1}^n e_{\mu}^2$  mit dem kleinsten Eigenwert  $\lambda$  von  $(\sum_{\nu=1}^n a'_{\sigma\nu} a_{\nu\sigma})$  die Fehlerabschätzung:  $\lambda \cdot \sum_{\nu=1}^n E_{\nu}^2 \leq \sum_{\mu=1}^n e_{\mu}^2$ . R. Schmidt (München).

**Fox, L., H. D. Huskey and J. H. Wilkinson: Notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations.** Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 149—173 (1948).

Es werden mehrere Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme  $Ax = b$  (Matrix  $A$ , Vektoren  $x, b$ ) vom Standpunkt des praktischen Rechners und hinsichtlich der Anwendbarkeit maschineller Methoden, besonders mit Hilfe von Hollerithmaschinen, betrachtet; nach einigen Arten von Eliminationsverfahren, wobei besonders die pivotal condensation hervorgehoben wird (Herausgreifen des absolut größten Koeffizienten bei jedem Eliminationsschritt) wird für symmetrische Matrizen  $A$  die Methode der orthogonalen Vektoren beschrieben, bei der man Vektoren  $x_r$  mit  $x'_r A x_s = 0$  für  $r \neq s$  verwendet und mit  $\alpha_r = x'_r b / x'_r A x_r$  die Lösung in  $\sum_{r=1}^n \alpha_r x_r$  erhält; auch die reziproke Matrix  $A^{-1}$  kann damit bequem erhalten werden. Es folgt die Methode von Choleski, bei der die symmetrische

Matrix  $A$  in der Gestalt  $LL'$  geschrieben wird mit  $L$  als Dreiecksmatrix. Mit  $A^{-1} = L'^{-1}L^{-1}$  läßt sich das Gleichungssystem lösen und die Eigenwertaufgabe  $(A\lambda - B)x = 0$  bei positiv definiten symmetrischen Matrizen  $A, B$  auf die Form  $(\lambda I - C)x = 0$  mit symmetrischer Matrix  $C$  zurückführen. Verff. halten die Methode von Choleski, die sich auch auf unsymmetrische Matrizen übertragen läßt, für die schnellste und genaueste. Collatz (Hannover).

**Black, A. N.:** Further notes on the solution of algebraic linear simultaneous equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 321—324 (1949).

Zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems  $\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) wird ein Schema aufgestellt, welchem die Auflösungsart nach der abgekürzten Doolittleschen Methode zugrunde liegt; es werden bei symmetrischer Matrix  $A$  zwei weitere Dreiecksmatrizen  $C, D$  schrittweise nach

$$c_{rs} = a_{rs} + \sum_{t=1}^{r-1} c_{ts} d_{tr}, \quad d_{rs} = -c_{rs}/c_{rr} \quad \text{für } s > r$$

berechnet, wobei von  $c_{1r} = a_{1r}$  ausgegangen wird. Durch geeignetes Falten des Papiers, auf dem die Matrix  $D$  steht, wird erreicht, daß stets miteinander zu multiplizierende Zahlen nebeneinander stehen. Ein Vergleich mit der Methode von Choleski ergibt für die Methode des Verf. eine geringere Anzahl nötiger Rechenoperationen. Collatz (Hannover).

**Bickley, W. G.:** Finite difference formulae for the square lattice. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 35—42 (1948).

In einem quadratischen Gitter der Maschenweite  $a$  (Gitterpunkte  $x_j, y_k$ , Funktionswerte  $f_{jk}$ ) werden für die Ausdrücke

$$S_1 = f_{0,1} + f_{1,0} + f_{0,-1} + f_{-1,0}, \quad S_2 = f_{1,1} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{-1,-1},$$

$$S_3 = f_{0,2} + f_{2,0} + f_{0,-2} + f_{-2,0}$$

mit Benutzung der Operatoren  $\xi = a \partial/\partial x, \eta = a \partial/\partial y, f_{1,0} = e^{\xi} f_{0,0}, \xi^2 + \eta^2 = a^2 \nabla^2, \xi \eta = a^2 D^2$  Taylorentwicklungen aufgestellt und Kombinationen, wie z. B.

$4S_1 + S_2 = 20 f_{0,0} + 6a^2 \nabla^2 f_{0,0} + \frac{1}{2} a^4 \nabla^4 f_{0,0} + \frac{1}{60} a^6 (\nabla^4 + 2D^2) \nabla^2 f_{0,0} + \dots$  angegeben, die für das Differenzenverfahren bei der Laplaceschen Differentialgleichung vorteilhaft sind. Für die Ableitung  $\partial f/\partial x$  wird der Ausdruck

$$f_{1,1} - f_{-1,1} + 4(f_{1,0} - f_{-1,0}) + f_{1,-1} - f_{-1,-1} = 12a \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0,0} + 2a^3 \nabla^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0,0} + O(a^5)$$

hergeleitet. Es folgen Formeln für angenäherte Auswertung von Doppelintegralen

$$J(c) = \int_{x_0-c}^{x_0+c} \int_{x_0-c}^{x_0+c} f dx dy, \quad J(a) = \frac{a^2}{45} (88 f_0 + 16 S_1 + 7 S_2) - \frac{a^6}{45} \nabla^4 f_0 + O(a^8),$$

$$J\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{1440} (1244 f_0 + 38 S_1 + 11 S_2) - \frac{17}{5760} a^6 \nabla^4 f_0 + O(a^8),$$

und ein kritischer Vergleich mit einfachen, bisher oft benutzten Näherungsausdrücken (z. B. des durch Übertragung der Simpsonschen Regel erhältlichen Ausdrucks). Collatz (Hannover).

**Salzer, Herbert E.:** Coefficients for repeated integration with central differences. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 54—61 (1949).

Bei der Formel für die  $k$ -fache Integration

$$\int_{x_0}^{x_1} \dots \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) (dx)^k = h^k \left[ A_0^{(k)} f_0 + B_0^{(k)} f_1 + \sum_{s=1}^m (A_{2s}^{(k)} \delta_0^{2s} + B_{2s}^{(k)} \delta_1^{2s}) \right] + R_{2m}$$

[mit den üblichen Bezeichnungen  $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), h = x_1 - x_0, \delta_0^{2s}$  und  $\delta_1^{2s}$  zentrale Differenzen,  $R_{2m}$  Restglied] werden die Koeffizienten  $A_{2s}^{(k)}, B_{2s}^{(k)}$  durch die



Bernoullischen Polynome  $B_r^{(n)}(x)$  vom  $r$ -ten Grade und  $n$ -ter Ordnung ausgedrückt, z. B.

$$A_{2s}^{(2)} = \frac{1}{(2s+2)!} [B_{2s+2}^{(2s+2)}(s+2) - B_{2s+2}^{(2s+1)}(s+1)]$$

und in Tabellen die Werte der  $A_{2s}^{(k)}$ ,  $B_{2s}^{(k)}$  tabellarisch angegeben und zwar für  $k = 2$  bis  $2s = 48$  und für  $k = 3, 4, 5, 6$  bis  $2s = 20$ . Collatz (Hannover).

Fox, L. and E. T. Goodwin: Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 373—388 (1949).

Es handelt sich um die Differentialgleichungen (1)  $y' = f(x)y + g(x)$ ; (2)  $y' = fy + gz$ ,  $z' = Fy + Gz$ , (3)  $y'' + fy' + gy = 0$  und (4)  $y'' = fy$ . Bedeutet  $h$  eine Schrittweite und  $a(x)$  eine beliebige Funktion von  $x$ , so werde zur Abkürzung  $a(kh) = a_k$  gesetzt. Ferner bedeuete  $\delta a_k = a_{k+\frac{1}{2}} - a_{k-\frac{1}{2}}$ ;  $\mu a_k = \frac{1}{2}(a_{k+\frac{1}{2}} + a_{k-\frac{1}{2}})$ . Man kann nun Rekursionsformeln für die näherungsweise Lösung der obigen Differentialgleichungen aufstellen, derart, daß man eine Tabelle für  $y_1, y_2, \dots$  bzw.  $z_1, z_2, \dots$  berechnen kann. Beispielsweise haben Hausmann und Schwarzschild für die Gleichung (1) Rekursionsformeln  $y_1 = (1 + A)y_0 + B$  benutzt, die man aus der Taylorentwicklung von  $y_1$  an der Stelle  $x = 0$  und der Berechnung der darin vorkommenden Ableitungen  $y^{(n)}(0)$  aus der Gleichung (1) ableiten kann. Verff. vergleichen eine dieser Formeln mit anderen Rekursionsformeln. Entsprechende Vergleiche werden auch für die anderen oben genannten Differentialgleichungen angestellt und an numerischen Beispielen demonstriert. Insgesamt handelt es sich um die Formeln, die aus

$$(I) \quad y_1 = \left[1 + h f_0 + \frac{h^2}{2}(f_0^2 + f_0')\right] y_0 + \left[h g_0 + \frac{h^2}{2}(f_0 g_0 + g_0')\right] + \Delta y_0, \quad \text{mit}$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\mu \delta^3 + \frac{1}{24}\delta^4 + \dots,$$

$$(II) \quad \left(1 - \frac{h}{2}f_1\right)y_1 = \left(1 + \frac{h}{2}f_0\right)y_0 + \frac{h}{2}(g_0 + g_1) + \Delta y_1 \quad \text{mit} \quad \Delta = -\frac{1}{12}\delta^3 + \frac{1}{120}\delta^5 + \dots,$$

$$(III) \quad \left(1 - \frac{h}{3}f_1\right)y_1 = \frac{4}{3}h f_0 y_0 + \left(1 + \frac{h}{3}f_{-1}\right)y_{-1} + \frac{h}{3}(g_1 + 4g_0 + g_{-1}) + \Delta y_0 \quad \text{mit}$$

$$\Delta = \frac{1}{90}\mu \delta^5 + \frac{1}{315}\mu \delta^7 + \dots$$

durch Fortlassen der  $\Delta$ -Glieder für die Gleichung (1) aufgestellt werden können, sowie um die Übertragung der Formeln (II) und (III) auf das System (2) und die Gleichungen (3) und (4), wenn diese auf die Form des Systems (2) gebracht werden. Außerdem werden noch die Formeln

$$\left(1 + \frac{h}{2}f_0\right)y_1 = (2 - h^2 g_0)y_0 - \left(1 - \frac{1}{2}h f_0\right)y_{-1} + \Delta y_0 \quad \text{für (3) mit}$$

$$\Delta = \frac{1}{6}h f_0 \mu \delta^3 + \frac{1}{12}\delta^4 + \dots$$

und

$$\left(1 - \frac{h^2}{12}f_1\right)y_1 = \left(2 + \frac{5}{6}h^2 f_0\right) - \left(1 - \frac{h^2}{12}f_{-1}\right)y_{-1} + \Delta y_0 \quad \text{mit} \quad \Delta = -\frac{1}{240}\delta^6 + \dots$$

für (4) betrachtet. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über die Verallgemeinerung auf nichtlineare Gleichungen eines bestimmten Typs und mit Hinweisen auf die Fortpflanzung von Fehlern. Hans Bückner (Minden).

Cooper, J. L. B.: The solution of natural frequency equations by relaxation methods. Quart. appl. Math. 6, 179—183 (1948).

Die Note enthält eine Erörterung der „relaxation method“ von Southwell [siehe R. V. Southwell, Relaxation methods. Oxford University Press 1940, sowie Pellew and Southwell, Proc. R. Soc., London, A 175, 262—290 (1940); dies. Zbl.

24, 335], bei deren Anwendung auf die Lösung von Eigenfrequenzgleichungen bei Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Zunächst werden die Bedingungen aufgestellt, unter denen das Verfahren konvergiert, wobei gezeigt wird, daß zwei Konvergenzkriterien angegeben werden können, und zwar in der Weise, daß, wenn das erste (zweite) Kriterium erfüllt ist, das Verfahren für die höchste (niedrigste) Frequenz konvergiert. Das Auffinden der höchsten Frequenz ist nicht nur von theoretischem Interesse, indem weiter bewiesen wird, daß die Ermittlung der höchsten Frequenz direkt dazu benutzt werden kann, die Bestimmung der weiteren Frequenzen wesentlich zu vereinfachen. *Gran Olsson* (Trondheim).

**Tasny-Tschiasny, L.:** The triangulation of a two-dimensional continuum for the purpose of the approximate solution of second-order partial differential equations. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 419—424 (1949).

Zur angenäherten Bestimmung einer Funktion  $V(x, y)$  aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma_x \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma_{xy} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma_{xy} \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial V}{\partial y} \right) = i(x, y)$$

und Randbedingungen wird ein beliebiges unregelmäßiges, dem Rande angepaßtes Punktgitter benutzt und die Gitterpunkte miteinander verbunden, so daß das Schema eines elektrischen Netzwerkes entsteht. Indem die Klammerausdrücke in der Differentialgleichung als negativ genommene Komponenten  $-i_x$ ,  $-i_y$  der Stromdichte aufgefaßt werden, wird ein System von Differentialgleichungen erhalten, deren Lösung direkt oder mit Hilfe der Relaxation zu ermitteln ist. — Zahlenbeispiel. *Collatz* (Hannover).

● **Wijdenes, P.:** Five place tables. Decimal system. Groningen: Noordhoff 1948. 168 S. 5,25 f.

● **Tables of generalized sine- and cosine-integral functions.** (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vols. 18 and 19.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press; London: Oxford University Press 1949. XXXVIII, 462 p. IX, 560 p., 55 s net each vol.

● **Tables of inverse hyperbolic functions.** (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. 20.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press; London: Oxford University Press 1949. XX, 290 p., 55 s. net.

**Rodier, Georges:** Sur un appareil permettant le calcul approché de certaines intégrales définies dans les problèmes de structure. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 395—397 (1948).

**Artobolevskij, I. I.:** Mechanismen zum Umfahren von Ellipsoiden. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **65**, 453—456 (1949) [Russisch].

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Metropolis, Nicholas and S. Ulam:** The Monte Carlo method. *J. Amer. statist. Assoc.* **44**, 335—341 (1949).

Zur praktischen Behandlung von Systemen mit mäßiger Teilchenzahl erweist sich sowohl die analytische als auch die statistische Mechanik als ungeeignet. Dasselbe kann bei der numerischen Auswertung vieler Glücksspiel-Aufgaben von der kombinatorischen und der wahrscheinlichkeitstheoretischen Analyse festgestellt werden. Oder von der diskontinuierlichen und kontinuierlichen Behandlung gewisser Fragen in Räumen von mäßiger Dimensionszahl. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich bei der Betrachtung von Verzweigungsvorgängen, mögen sie sich grundsätzlich unstetig oder erlaubterweise stetig darbieten. Bei den kosmischen Strahlen drängt sich z. B. zur Behandlung der auftretenden Markoffschen Ketten zunächst die Matrixtheorie auf. Der kaskadenartige Ablauf führt aber hier bald zu einer beträchtlichen Zahl von Multiplikationen mit Matrizen ziemlich hoher Ordnung. Bei den Boltzmannschen Integro-Differentialgleichungen der Gastheorie oder bei der Fokker-Planckschen Diffusionsgleichung der Wahrscheinlichkeitstheorie — mit Quellen- oder Verzweigungsglied — erweist sich wieder die analytische Methode



als äußerst schwerfällig und — mangels Lösungen in geschlossener Gestalt — als unvollständig. — Als neues Verfahren wird in diesen und ähnlichen Fällen die im Titel genannte Methode vorgeschlagen. Nach den spärlichen und rein wörtlichen Angaben der Verff. besteht diese Methode darin, daß man — bei stetigen Verhältnissen nach vorangehender diskontinuierlicher Annäherung — aus der Gesamtheit aufs Geratewohl Elemente bzw. Einzelfälle herausgreift, deren verhältnismäßiges Verhalten oder Verlauf bzw. Genealogie verfolgt und dann aus den Stichproben dieser Fälle statistische Rückschlüsse auf die Gesamtheit zieht. Diese Methode besitzt — besonders beim gemeinsamen Auftreten von kausalen und zufälligen Vorgängen — ihre eigenen Großzahl-Gesetze und asymptotischen Sätze. Der dem Laplace-Ljapunoffschen entsprechende konnte trotz seiner Wichtigkeit noch nicht erhalten werden. Besondere Schwierigkeiten stellen sich der Schätzung der Fehlerwahrscheinlichkeit entgegen. *Szentmártony.*

**Fréchet, M.: Les espaces abstraits et leur utilité en statistique théorique et même en statistique appliquée.** J. Soc. statist. Paris, Paris 88, 410—421 (1947).

Verf. gibt einen Überblick der von ihm in Rev. sci., Paris 82, 483—512 (1944) und Ann. Inst. Henri Poincaré 10, 215—310 (1947) mitgeteilten Grundlagen einer Theorie der Zufallselemente irgendwelcher Art in einem metrischen Raume  $D$ . Diese beziehen sich auf mögliche Definitionen des Mittelwertes, der verschiedenen typischen Werte sowie der Streuung und der Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit. — Ist z. B.  $X$  das zufällige und  $a$  ein bestimmtes Element von  $D$  mit der gegenseitigen Entfernung  $(X, a)$  und das absolute Moment  $r$ -ter Ordnung  $\mathfrak{M}(X, a)^r$  endlich, dann wird  $\text{fin}_a \inf [\mathfrak{M}(X, a)^r]^{1/r}$  als typische Abweichung  $r$ -ter Ordnung von  $X$ , für  $r = 2$  insbesondere als die Streuung von  $X$  betrachtet. Die  $a$ -Werte selbst, für welche diese untere Grenze angenommen wird, werden die typischen Werte  $r$ -ter Ordnung von  $X$  genannt, insofern sie in  $D$  vorhanden sind. Ist der Raum noch ein Banachscher, d. h. metrisch, vektoriell und vollständig, dann läßt sich ein typischer Wert zweiter Ordnung, also ein Mittelwert nach klassischem Muster auch unmittelbar, allerdings mit Hilfe eines abstrakten Integrals, definieren. Räume von Kurven oder Flächen sind bereits als metrische behandelt, aber als Banachsche noch nicht aufgefaßt worden. — Als neue Anwendung wird zum Schluß von einem Versuch berichtet. Dieser bezieht sich auf die Bestimmung der Verteilungsgesetze innerhalb zweier Klassen von geschlossenen Kurven: Der horizontalen Querschnittskonturen von menschlichen Schädeln in Stirnhöhe bzw. der Gestaltskurven eines auf einen Tisch geworfenen verknoteten Fadens. Ist  $\varrho = f(\omega)$  die Gleichung der zu untersuchenden Kurven in Polarkoordinaten, so wird die Zahl der zu einer hinreichenden Annäherung nötigen Fourier-Koeffizienten von  $f(\omega)$  zu 25 bzw. 120 geschätzt. Die Koeffizienten sind bisher auf ihre normale Verteilung und Unabhängigkeit untersucht worden. Letztere mit Hilfe von vier Korrelationszeigern. *Szentmártony.*

**Doss, Shafik: Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié.** Bull. Sci. math., II. S. 73, 48—72 (1949).

Sei  $X$  die Zufallsveränderliche und  $a$  ein bestimmtes Element innerhalb eines mit Wahrscheinlichkeitsmaß versehenen metrischen Raumes  $D$ , strenger dessen Sphäroiden enthaltenden Mengenkörpers. Es bezeichne  $(\alpha, \beta)$  den gegenseitigen Abstand der Elemente  $\alpha, \beta$  und  $M(X, \lambda)$  das endliche Moment erster Ordnung von  $(X, \lambda)$ . Ein bestimmtes  $a$  heißt ein Mittelwert von  $X$ , wenn  $(a, \lambda) \leq M(X, \lambda)$  für alle  $\lambda$  in  $D$  ist. Bei skalarem  $X$  ergibt sich so als einziger Wert der klassische Mittelwert. Innerhalb Banachscher, d. h. metrischer, vektorieller und vollständiger Räume ergibt sich so für alle  $X$  mit endlichem  $M\|X\|$  mindestens ein solcher Mittelwert. Und zwar z. B. der nach klassischem Muster von Fréchet durch ein abstraktes Integral definierte Mittelwert, welchen Verf. noch leicht verallgemeinert. Genügt aber ein Banachscher Raum noch der Fréchet'schen Bedingung, daß  $\|X\|^2$  ein Funktional zweiter Ordnung ist, dann ist dieser Mittelwert der einzige im angegebenen Sinn. Für den so definierten einzigen Mittelwert läßt sich aber auch in rein metrischen Räumen 1. die Funktionalgleichung des bedingten Mittelwertes zweier Veränderlichen, 2. nach Verallgemeinerung  $Z_n$  des arithmetischen

Mittels durch  $(Z_n, \lambda) \leq n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i, \lambda)$  für alle  $\lambda$  in  $D$  das starke Gesetz der großen Zahlen selbst verallgemeinern. Letzteres in folgender Fassung: Sind die Sphäroiden von  $D$  kompakt, existieren die  $Z_n$  für alle Versuche und besitzt  $X$  einen einzigen Mittelwert  $a$ , dann streben die  $Z_n$  mit der Wahrscheinlichkeit Eins gegen  $a$ .

*Szentmártony* (Budapest).

**Erdős, P.:** On a theorem of Hsu and Robbins. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 286—291 (1949).

Hsu und Robbins zeigten (dies. Zbl. **30**, 167), daß, wenn die  $X_n$  identisch verteilte Zufallsveränderliche mit dem Mittelwert Null sind, für

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|(X_1 + \cdots + X_n)/n| > \varepsilon] < \infty$$

bei allen  $\varepsilon > 0$  die Endlichkeit der Streuung hinreichend ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung konnten sie aber nur vermuten. Dies gelang Verf. zu zeigen. Gestützt auf Bemerkungen von Chung wird genauer folgender Satz bewiesen: Besitzen die über einem meßbaren Raum mit dem Gesamtmaß Eins meßbaren Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots$  dieselbe Verteilungsfunktion  $G(t) = m(x; f_k(x) \leq t)$ , dann sind bei  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  für  $\sum_{n=1}^{\infty} m(x; |s_n(x)| > n) < \infty$  die Bedin-

gungen  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} t dG(t) \right| < 1$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 dG(t) < \infty$  notwendig und hinreichend. Durch

ähnliche Methoden soll Verf. auch zeigen können, daß für  $\sum_{n=1}^{\infty} m(x; |s_n(x)| > n^{2/c}) < \infty$

bei  $c < 2$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^c dG(t) < \infty$  und bei  $2 < c < 4$  außerdem  $\int_{-\infty}^{\infty} t dG(t) = 0$  notwendig und hinreichend ist. Ferner, daß es beim Mittelwert Null und endlichem vierten Moment eine Konstante  $r$  gibt, bei welcher

$$\sum_{n=1}^{\infty} m[x; |s_n(x)| > n^{1/2} (\log n)^r] < \infty$$

wird.

*Szentmártony* (Budapest).

**Loève, Michel:** On the „central“ probability problem. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 328—332 (1949).

Das Konvergenzproblem des Verteilungsgesetzes von  $(X_1 + \cdots + X_n)/c_n$  gegen das normale Gesetz für  $n \rightarrow \infty$  bei unabhängigen Zufallsveränderlichen  $X_k$  und gewissen Zahlen  $c_n \rightarrow \infty$  wurde 1935 von Feller und P. Lévy endgültig gelöst. Das zentrale Problem des Grenzesetzes von  $X_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,\nu_n}$  für  $n \rightarrow \infty$  bei  $\nu_n \rightarrow \infty$  selbst ist bis 1937 von Bawley, Khintchine, Kolmogoroff und P. Lévy soweit gefördert worden, daß als Klasse der Grenzesetze jene der unendlich teilbaren Gesetze, grob gesprochen also die Faltungen eines normalen Gesetzes mit einer kontinuierlichen Schar von Poissonschen Verteilungsgesetzen erkannt wurde. Und zwar bei Komponenten, welche neben der natürlichen Bedingung  $\max_{1 \leq k \leq \nu_n} P[|X_{n,k}| > \varepsilon] \rightarrow 0$  für jedes gegebene  $\varepsilon > 0$ , d. h. bei der Möglichkeit

ihrer asymptotischen und gleichmäßigen Vernachlässigung, noch immer der Unabhängigkeitsbedingung für jedes feste  $n$  genügen. Die vorliegende Note kündigt Hilfsmittel zur Abstreifung dieser Bedingung in Richtung der asymptotischen Äquivalenz bzw. Unabhängigkeit an. Die so erhaltenen Resultate umfassen die für die Konvergenz gegen bestimmte Gesetze bisher gefundenen Bedingungen. Und zwar die von Gnedenko und Doeblin 1939 für ein bestimmtes unendlich teilbares Grenzesetz, ferner die von S. Bernstein 1927 bzw. vom Verf. 1945—1948 für das normale und die 1939 von Gnedenko und Marcinkiewicz — im Falle der Unabhängigkeit — für ein Poissonsches Grenzesetz erhaltenen Konvergenzbedingungen.



Eine ausführliche Veröffentlichung ist in der Statistical Series of the University of California vorgesehen. *Szentmártony* (Budapest).

**Anderson, O.:** Zum Problem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Statistik. Rev. suisse Écon. polit. Statist., Berne 83, 489—518 (1947).

Verf. gibt eine Darstellung des Rückschlusses der Wahrscheinlichkeit  $p_1$  eines Teilkollektivs auf die Wahrscheinlichkeit  $p$  des totalen Kollektivs nach der Methode von Millot. Er glaubt, dabei ohne das Theorem von Bayes auszukommen. Tatsächlich behandelt er jenen Spezialfall des Theorems von Bayes nach der Darstellung von Millot, bei dem alle Werte von  $p$  zwischen 0 und 1 als gleich wahrscheinlich erscheinen. *Saxer* (Zürich).

**Anderson, O.:** Zur Frage der Umkehrung des Theorems von Bernoulli; eine Erwiderung. Rev. suisse Écon. polit. Statist., Berne 84, 178—180 (1948).

Stellungnahme des Verf. zu einer Bemerkung von Gini betr. seines vorstehend besprochenen Artikels. *Saxer* (Zürich).

### Statistik:

**Godwin, H. J.:** Some low moments of order statistics. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 279—285 (1949).

Die Stichprobe  $x(1|n) \geq x(2|n) \geq \dots \geq x(n|n)$  werde zufällig einem mit Mittelwert 0 und Streuung 1 normal verteilten Kollektiv entnommen. Verf. berechnet für  $x(i|n)$ ,  $x(j|n)$  die Momente erster und zweiter Ordnung für alle  $n \leq 10$  unter Benutzung von Integralen der Form

$$\begin{aligned} \psi(i) &= \int_{-\infty}^{\infty} F^i(x) \cdot [1 - F(x)]^i dx, & \psi(i, j) &= \int_{-\infty}^{\infty} F^i(x) \cdot \int_x^{\infty} [1 - F(y)]^j dy dx, \\ \alpha(i, j) &= \int_{-\infty}^{\infty} x F^i(x) \cdot [1 - F(x)]^j dx, & \beta(i, j) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) F^i(x) \cdot [1 - F(x)]^j dx \end{aligned}$$

mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi},$$

die sich mit Hilfe von Differenzengleichungen für die  $\alpha$  und  $\beta$  und von Relationen zwischen den  $\psi$  bzw.  $\beta$  und  $\alpha$  tabulieren lassen. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Hoel, P. G. and R. P. Peterson:** A solution to the problem of optimum classification. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 433—438 (1949).

Es liegen  $r$  Populationen  $1, \dots, r$  vor, in welchen die Variablen  $x_1, \dots, x_k$  jeweils mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_i(x_1, \dots, x_k)$  verteilt seien. Bei zufälligem Auswählen eines Elementes aus der Gesamtpopulation sei  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Element der Population  $i$  zu erfassen. Verf. beweist: Ist  $M_i$  derjenige Bereich des  $k$ -dimensionalen  $x$ -Raumes  $R$ , in welchem  $p_i f_i > 0$  und  $p_i f_i \geq p_j f_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) gilt, und werden übergreifende Teile der  $M_i$  jeweils demjenigen mit kleinerem  $i$  zugeschrieben, so ist bei Zuordnung von  $M_i$  und Population  $i$  die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Klassifikation, also  $Q = \sum_i p_i \int_{M_i} f_i dx_1 \dots dx_k$ , maximal. Für den in praxi vorliegenden Fall unbekannter  $p_i$  und  $f_i$  wird mit Hilfe des Tschebyscheffschen Lemmas (für Momente 4-ter Ordnung) und der Schwarzchen Ungleichung, unter bestimmten Voraussetzungen über die Stichprobenverteilungen der in den  $f_i$  enthaltenen zu schätzenden Parameter, für große Stichproben eine optimale Klassifikation zwischen den Populationen hergestellt. *M. P. Geppert*.

**Nair, K. R.:** A further note on the mean deviation from the median. Biometrika, Cambridge 36, 234—235 (1949).

Verf. gibt eine Ergänzung seiner im Jahre 1947 erschienenen Arbeit (dies. Zbl. 30, 168) über den Vergleich der Variationskoeffizienten des mittleren Fehlers von

(„unbiased“) Schätzwerten der mittleren Abweichung  $\sigma$  einer Normalverteilung, gewonnen aus der mittleren Abweichung vom Mittelwert,  $m$ , und aus der mittleren Abweichung vom Medianwert  $m'$ . Unter Zuhilfenahme der 1948 von Jones (dies. Zbl. 31, 378) und 1947 von Hastings, Mosteller, Tukey und Winsor [Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 413—426 (1947)] veröffentlichten Tafeln von Mittelwerten, Streuungen usw. wird eine Zusammenstellung der Ergebnisse einer Berechnung der Variationskoeffizienten von  $m$  und  $m'$  für Stichproben vom Umfang  $n = 2, 3, \dots, 10$  mitgeteilt. Die numerischen Resultate werden mit 2 Dezimalstellen angegeben.

G. Wünsche (München).

Walsh, John E.: Applications of some significance tests for the median which are valid under very general conditions. J. Amer. statist. Assoc. 44, 342—355 (1949).

In zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 33, 76) hat Verf. eine Reihe einfacher und wirksamer Testkriterien für den Zentralwert einer Stichprobe angegeben, die unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gelten. Ergänzend wird hier eine einfache graphische Interpretation derselben gegeben, ferner an Beispielen die Anwendung der Kriterien auf transformierte Variablen, bei laufender Fabrikationskontrolle, zum Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben sowie von Mittelwerten paarweise zugeordneter Beobachtungen illustriert.

M. P. Geppert.

Pearce, S. C.: Randomized blocks with interchanged and substituted plots. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 10, 252—256 (1948).

In der vorliegenden Note gibt Verf. eine kurze, durch zwei kennzeichnende Zahlenbeispiele besonders anschaulich gemachte Darstellung der Lösung des bekannten Signifikanzproblems für  $J$  Versuchsblocks („randomized blocks“) und  $K$  verschiedene Behandlungsweisen mit Hilfe des  $z$ -Tests [vgl. M. G. Kendall, The advanced theory of statistics, London 1948, 300—301] für den Fall, daß a) zwei zu verschiedenen Blocks gehörige Versuchsplätze durch Zufall ausgetauscht und b) gewisse, zu ein und derselben Behandlungsart gehörige Versuchsplätze von vornherein durch solche einer anderen Behandlungsart ersetzt worden sind. — Eine exakte Behandlung der aufgeworfenen Problemstellung ist von nicht unwesentlicher Bedeutung für die moderne Praxis der Auswertung von nach dem Zufallsprinzip angeordneten Pflanzungsversuchen im Hinblick auf die Wirksamkeit verschiedener Behandlungsmethoden.

G. Wünsche (München).

Nandi, H. K.: A note on conditional tests of significance. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 121—124 (1949).

Sind  $x$  und  $y$  zwei aus  $p$  bzw.  $n$  Zufallsvariablen und  $\theta$  und  $\theta'$  zwei aus  $k$  bzw.  $l$  Parametern gebildete Vektoren, so läßt sich die gemeinsame  $(k + l)$ -parametrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der  $p + n$  Zufallsvariablen in der Form  $\varphi = \varphi_1(x|\theta)\varphi_2(y|x, \theta')$  schreiben, wenn sich die Parametervektoren  $\theta$  und  $\theta'$  entsprechend auf die unabhängige Verteilung  $\varphi_1(x|\theta)$  des  $x$ -Vektors und auf die von  $x$  abhängige bedingte Verteilung  $\varphi_2(y|x, \theta')$  des  $y$ -Vektors aufteilen lassen. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so kann eine Hypothese über  $\theta'$  entweder mit einem auf  $\varphi$  oder einem bedingten, auf  $\varphi_2$  beruhenden Test geprüft werden. Verf. untersucht nun die Bedingungen, unter denen ein optimaler bedingter Test seine optimalen Eigenschaften im Hinblick auf den entsprechenden, auf  $\varphi$  beruhenden Test beibehält. Er gibt dabei die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die auf  $\varphi_2$  beruhende beste (most powerful) kritische Region unabhängig von  $\varphi_1$  gleich derjenigen ist, die sich bei Verwendung von  $\varphi$  ergibt. Obwohl die Mächtigkeit (power) von Tests für die partielle Regression, den multiplen Korrelationskoeffizienten usw. nicht völlig unabhängig von  $\varphi_1$  ist, bleibt diese, wie am Beispiel des multiplen Korrelationskoeffizienten gezeigt wird, für eine große Klasse von Verteilungen  $\varphi_1$  invariant.

Georg Friede (Göttingen).

Patnaik, P. B.: The non-central  $\chi^2$ - and  $F$ -distributions and their applications. Biometrika, Cambridge 36, 202—232 (1949).



Seien  $\xi_1, \dots, \xi_n$  normal verteilte Variablen mit der gleichen Streuung  $\sigma$  und Mittelwerten  $a_1, \dots, a_n$ , so ist  $\chi'^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 / \sigma^2$  ein „nicht-zentraler“  $\chi^2$ -Ausdruck.

Verf. leitet mittels geometrischer Überlegungen im  $n$ -dimensionalen Raum die — auf anderen Wegen von R. A. Fisher [Proc. R. Soc., London A **121**, 654—673 (1928)] und von Tang [Statist. Res. Mem. London **2**, 126—149 (1938); dies. Zbl. **20**, 243] bestimmte — Verteilung von  $\chi'^2$  ab, bestätigt das Resultat mittels geeigneter orthogonaler Transformation der Variablen  $\xi_i$  und bestimmt daraus die bedingte Verteilung von  $\chi'^2$  bei vorgeschriebenen linearen Relationen zwischen den  $\xi_i$ . Sodann wird die exakte Verteilung von  $\chi'^2$  approximiert durch eine Pearson-Typ III-Verteilung, sowie durch Gram-Charlier-Reihen vom Typ A, für  $n > 30$  durch Normalverteilung. Die Resultate werden angewandt zur Berechnung der Leistungsfähigkeit (power function) des  $\chi^2$ -Kriteriums. Entsprechend approximiert Verf. in geeigneter Weise die bereits bekannte Verteilung des „nicht-zentralen“  $F' = (\chi_1'^2/\nu_1)/(\chi_2'^2/\nu_2)$ , wo  $\chi_1'^2$  bzw.  $\chi_2'^2$  der „nicht-zentralen“ bzw. gewöhnlichen  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\nu_1$  bzw.  $\nu_2$  Freiheitsgraden folgen, und verwendet sie zur Berechnung der Leistungsfähigkeit der Varianzanalyse. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Orcutt, Guy H. and Donald Cochran: A sampling study of the merits of autoregressive and reduced form transformations in regression analysis. J. Amer. statist. Assoc. **44**, 356—372 (1949).

Die Brauchbarkeit des von den Verff. (dies. Zbl. **33**, 82) vorgeschlagenen, auf autoregressiven Transformationen beruhenden Iterationsverfahrens zur Schätzung der Strukturparameter wird an Modellen für Reihen mit autokorrelierten Fehlergliedern dargelegt, in denen mehr als eine Beziehung zwischen den Variablen besteht. Dabei wird insbesondere auf die nur bedingte Zuverlässigkeit dieses Schätzverfahrens hingewiesen, wenn die zugrunde gelegte Zeitreihe nur etwa 20 Beobachtungen umfaßt und es nicht möglich ist, den korrelativen Zusammenhang zwischen den Fehlergliedern näher anzugeben. *Georg Friede* (Göttingen).

Quenouille, M. H.: Note on the elimination of insignificant variates in discriminatory analysis. Ann. Eugenics, London **14**, 305—308 (1949).

In der vorliegenden Note wird eine gedrängte Darstellung der Technik des Verfahrens gegeben, das man im Anschluß an die Entwicklungen von Cochran [Suppl. J. R. statist. Soc., London **5**, 171—176 (1938); dies. Zbl. **19**, 319] anwenden wird, wenn es sich in der Diskriminationsanalyse darum handelt, solche Variable aus den Berechnungen mehrfacher Regressionen auszuschalten, die einen nur geringfügigen oder auch gar keinen Beitrag zur Lösung des Problems liefern. Die beschriebene Rechenmethodik macht im wesentlichen Gebrauch von einer vorteilhaften Ausnützung des Matrizenkalküls. *G. Wünsche* (München).

Whitfield, J. W.: Intraclass rank correlation. Biometrika, Cambridge **36**, 463—467 (1950).

Black, Duncan: The decisions of a committee using a special majority. Econometrica, Menasha **16**, 245—261 (1948).

Black, Duncan: The elasticity of committee decisions with an altering size of majority. Econometrica, Menasha **16**, 262—270 (1948).

Wird einer Gruppe von  $n$  Personen eine Anzahl von Anträgen vorgelegt, über die sie mit einer Majorität von  $M/n$  ( $1 \geq M/n > 1/2$ ) entscheiden soll, und ist für jeden Angehörigen der Gruppe die Reihenfolge bekannt, in der er bereit ist, den Anträgen zuzustimmen, so lassen sich, wie Verf. in der erstgenannten Arbeit zeigt, allgemeine Aussagen über den Ausgang von Abstimmungen über die einzelnen Anträge gewinnen. Für den Fall, daß sich die Bewertung der Anträge durch jedes einzelne Mitglied als eingipflige Kurve darstellen läßt, wird mit einfachen geometrischen Hilfsmitteln eine Reihe von Sätzen über die Zahl der Stimmen für und gegen be-

stimmte Anträge bewiesen. — Die zweite Arbeit ist der Untersuchung der Grenzen des Bereichs als Funktion der vorgeschriebenen Majorität gewidmet, der diejenigen Anträge enthält, die sich gegen irgendeinen anderen Antrag bei einer Abstimmung halten lassen. Sind die Bewertungskurven der Mitglieder wiederum eingipflig, so liegen diese Grenzen auf einer U-förmigen diskontinuierlichen Kurve, die mit unbeschränkt wachsender Mitgliederzahl in eine stetige Kurve gleicher Form übergeht. Für diese Kurve wird ein Maß für die Elastizität der Entscheidung bei Änderung der vorgeschriebenen Majorität eingeführt. Für den Fall, daß die Bewertungskurven nicht eingipflig sind, wird in beiden Arbeiten ein einfaches arithmetisches Verfahren zur Lösung der behandelten Fragen angegeben. Die hier aufgestellte Theorie kann, wie in einem Beispiel gezeigt wird, zur Analyse von Kartellbeschlüssen verwendet werden.

Georg Friede (Göttingen).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

Skellam, J. G.: The probability distribution of gene-differences in relation to selection, mutation, and random extinction. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 364 — 367 (1949).

Verf. greift auf das von R. A. Fisher [Proc. R. Soc. Edinburgh 42, 321 (1922); 50, 204—219 (1930); The genetical theory of natural selection, Oxford 1930] aufgeworfene, aber nur für den Spezialfall seltener Mutationen gelöste Problem zurück, die mathematische Form der Verteilung der Genhäufigkeiten in einer Population zu bestimmen, und löst es für den allgemeinen Fall beliebiger, konstanter Mutationsraten  $\lambda$  unter Benutzung von Fishers Methodik. Nimmt man an, daß die Anzahl der Nachkommen eines bestimmten Gens der Elterngeneration in der Tochtergeneration einer Poisson-Verteilung folge, deren erzeugende Funktion bekanntlich von der Form  $\exp[c(t-1)]$  ist, so muß, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Genzahlen von Generation zu Generation konstant bleibt, die Erzeugende der Verteilung der Funktionalgleichung

$$\Phi(t) = \exp[\lambda(t-1)] \cdot \Phi\{\exp[c(t-1)]\}$$

genügen. Der Ansatz

$$K(t) = \ln \Phi(\exp t) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [w_n(t) - 1]$$

mit  $w_n(t) = \exp\{c \cdot [w_{n-1}(t) - 1]\}$ ,  $w_0(t) = \exp t$ , löst dieselbe und ergibt für die gesuchte Verteilung die ersten Kumulanten  $\left(\alpha_r = \left. \frac{d^r K(t)}{dt^r} \right|_{t=0}\right)$  als

$$\alpha_1 = \lambda/(1-c), \quad \alpha_2 = \lambda/(1-c)(1-c^2), \quad \alpha_3 = \lambda \cdot (1+2c^2)/(1-c)(1-c^2)(1-c^3).$$

Eine zweite Lösung bestimmt Verf. in der Form

$$\Phi(u_x) = A \cdot [c^{-x} \cdot du_x/dx]^{-\lambda/c}$$

mit  $u_{x+1} = \exp[c(u_x - 1)]$ ,  $u_0 = 0$ . Die Funktion  $v_x = 1 - u_x$  genügt näherungsweise der Differenzengleichung

$$v_{x+1} = c v_x - c v_x v_{x+1}/2,$$

durch deren Lösung sich für  $\Phi(t)$  näherungsweise die Erzeugende einer „negativen Binomial“-Verteilung ergibt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Chandra Sekar, C. and W. Edwards Deming: On a method of estimating birth and death rates and the extent of registration. J. Amer. statist. Assoc. 44, 101—115 (1949).

Es wird ein Verfahren entwickelt, die Zahlen der Geburten und Sterbefälle durch Vergleich der registrierten und der in unmittelbarer Erhebung erfaßten Fälle zu schätzen und den Erfassungsgrad des Registrators (im Beispiel eines indischen Bezirks nur 40—70%) zu ermitteln. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des Erhebers

nicht unabhängig von der des Registrators, dann wird die Wirkung der Abhängigkeit durch Unterteilung der erfaßten Fälle (nach Teilbezirken oder nach dem Geschlecht) reduziert.

Härten (München).

**Duchez, Ed.:** *Étude sur l'organisation d'un service statistique centralisé en matière d'assurance-incendie de risques industriels*. Thèse soutenue le 11 Juillet 1944 pour l'obtention du titre de membre agrégé. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 59, 131—360 (1948).

Eine sehr breite Monographie, in der die Fragen der Tarifierung in der industriellen Feuerversicherung systematisch von allen Seiten angegangen werden. Hier interessieren vor allem die theoretische Entwicklung von Formeln für die Prämie in Teil II, Kapitel 2, und die statistische Methode der Prämienberechnung in Kapitel 2 und 3 von Teil IV. Daneben werden sehr eingehend die sachlichen Voraussetzungen behandelt, insbesondere die baulichen Gegebenheiten. In einem letzten Teil werden die Grundzüge einer statistischen Beobachtung der industriellen Risiken besprochen.

Härten (München).

**Tintner, Gerhard:** *Homogeneous systems in mathematical economics*. *Econometrica*, Menasha 16, 273—294 (1948).

Eine in allen Variablen zweimal differenzierbare Funktion  $f(u_1, \dots, u_n)$  heißt homogen vom Grade  $K$  in den Variablen  $u_1, \dots, u_m$ ,  $m \leq n$ , wenn für alle reellen  $t$  gilt  $f(tu_1, \dots, tu_m, u_{m+1}, \dots, u_n) = t^K \cdot f$ . Homogenität der Nachfrage- und Angebotsfunktionen in den Preisen (und Einkommen) vom Grade 0 spielt in der Ökonomik eine große Rolle. Verf. untersucht diese Homogenität vom Grade 0 u. a. beim Konsum, der Produktion, in monopolistischer und oligopolistischer Wirtschaft. Besonderes Interesse bieten die Ausnahmen von der Homogenität (welche besagt, daß Angebot und Nachfrage nicht von den absoluten Preisen, sondern von den Preisverhältnissen abhängen). Verf. stellt solche Ausnahmen z. B. bei zweiseitigem Monopol fest, wenn sich die Machtverhältnisse verschieben. Er stellt die Vermutung auf, daß mangelnde Homogenität darauf beruhe, daß die Differenzierbarkeitsforderung nicht erfüllt ist; Homogenität fehlt z. B., wenn Angebots- oder Nachfragekurven einen Knick haben. — Bei den Untersuchungen des Verf. handelt es sich um Anwendungen eines von ihm entwickelten Satzes über homogene Funktionen: Die Funktion  $g(x_1, \dots, x_s)$  soll unter den Nebenbedingungen  $h_i(x_1, \dots, x_s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zum Maximum werden. Die Lösungen  $x_1, \dots, x_p$  dieses Variationsproblems sind homogen vom Grade 0 in den  $x_{r+1}, \dots, x_s$ ,  $p \leq r < s$ , wenn  $g$  und die  $h_i$  entweder homogen von beliebigem Grade in oder unabhängig von  $x_{k+1}, \dots, x_s$  sind, wo je nachdem  $k = r$  (Theorem 5 des Verf.) oder  $k = p$  (Theorem 6).

Härten (München).

**Nataf, André:** *Sur la possibilité de construction de certains macromodèles*. *Econometrica*, Menasha 16, 232—244 (1948).

L. R. Klein [*Econometrica*, Menasha 14, 93—108 (1946)] hatte die Frage gestellt, ob es möglich sei, aus den technischen Produktionsfunktionen (mit Produkt-, Arbeits- und Kapitalparametern als Variablen) vieler Einzelunternehmen eine universale Produktionsgleichung abzuleiten. Als Kriterium dafür hatte er ein System partieller Differentialgleichungen aufgestellt, ausgehend von Funktionen  $X$  aller Produktparameter,  $N$  aller Arbeitsparameter und  $Z$  aller Kapitalparameter. Verf. findet durch Integration, daß die einzelnen Produktionsfunktionen in lineare Ausdrücke der drei Glieder Produktion, Arbeit und Kapital umformbar sein müssen. Die universale Produktionsgleichung hat dann die Gestalt  $X \equiv N + Z$ , in welcher sie jedoch nur für kleine Änderungen der Produktionsfaktoren in Frage kommt. Die gewonnene Lösung des Problems ist also wenig wirkungsvoll, weshalb Verf. meint, man solle versuchen, statt statischer dynamische ökonomische Modelle aufzustellen, mit der Zeit als unabhängiger Variabler.

Härten (München).



Hawkins, David: Some conditions of macroeconomic stability. *Econometrica*, Menasha 16, 309—322 (1948).

Verf. untersucht diejenigen Quellen der Nichtstabilität eines tauschwirtschaftlichen Systems, die tiefer liegen als in den Unvollkommenheiten des Tauschmechanismus (also äußeren Störungen), nämlich in der gegenseitigen Beeinflussung der Teilsysteme (also inneren Zügen des Systems). Bestehe das System aus  $n$  Teilen ( $i$ ), von denen jeder ein bestimmtes Gut  $i$  erzeuge,  $i = 1, 2, \dots, n$ , und sei  $a_{ij}$  der Warenanteil von ( $i$ ) an der Erzeugung der Einheit von ( $j$ ),  $c_{ij}$  der entsprechende Kapitalanteil. Dann wird das System beschrieben durch die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j + c_{ij} \dot{x}_j), \quad 1 - a_{ii} > 0 \text{ für alle } i, \quad a_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0 \text{ für alle } i, j.$$

Dieses Gleichungssystem hat höchstens eine partikuläre Lösung als wirtschaftsstabile Zustandsgleichung, während alle anderen partikulären Lösungen vorübergehende Überlagerungen oder Störungen des Zustandes darstellen. Wachsen die Überlagerungsfunktionen (bzw. ihre Amplituden) stärker als die Zustandsfunktion, so ist das Gesamtsystem instabil. Stabilitätskriterium ist  $c_i c_{ij} - c_j c_{ii} > 0$ , d. h. der Kapitalanteil von ( $i$ ) an der Produktion von ( $j$ ) ist größer als der an der Produktion von ( $i$ ) selbst, die Teilsysteme sind also eng gekoppelt. Härten (München).

Oreutt, G. H.: A study of the autoregressive nature of the time series used for Tinbergen's model of the economic system of the United States, 1919—1932. *J. R. statist. Soc.*, London, Ser. B. 10, 1—53 (1948).

Zahlen der Wirtschaft lassen sich oft in Zeitfolgen  $X_i$  zusammenfassen, wo  $i$  das auf einen zweckmäßigen 0-Punkt bezogene Jahr angibt. Statt der  $X_i$  werden oft nur ihre Abweichungen vom Mittelwert genommen. Zum Zwecke kurzfristiger wirtschaftlicher Vorhersagen ist, soweit letztere überhaupt möglich sind, die Kenntnis von Beziehungen zwischen gegenwärtigen und vergangenen Werten der  $X$  notwendig, die nur aus einer großen, homogenen Familie solcher Zeitfolgen zu gewinnen sind. Verf. findet, daß die 52 Zeitfolgen zu Tinbergens Modell des Wirtschaftssystems der Vereinigten Staaten 1919—1932 (14 gliedrige Folgen) aus der Familie von Folgen abgeleitet werden können, die durch die lineare Differenzengleichung  $Y_t = Y_{(t-1)} + 0,3 \cdot (Y_{(t-1)} - Y_{(t-2)}) + \varepsilon_t$  erzeugt werden;  $\varepsilon_t$  ist dabei eine Zufallsgröße (ohne Abhängigkeitsgesetz von  $t$ ) mit Erwartungswert 0. — Mathematischen Ausgangspunkt bildet

ein System linearer Differenzengleichungen  $\sum_{\mu=1}^n \beta_{\nu\mu} x_{\mu t} = y_{\nu t}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , mit „endogenen“

Variablen  $x_{\mu t}$ , die das System beeinflussen und von ihm beeinflusst werden, und „exogenen“  $y_{\nu t}$ , die nur auf das System einwirken.  $\beta_{ij}$  sind Polynome im Operator  $D$ , der den Zeitparameter um 1 Zeiteinheit verändert, etwa

$$\beta_{11} x_{1t} = (a_1 + a_2 D + a_3 D^2 + \dots) x_{1t} = a_1 x_{1t} + a_2 x_{1(t-1)} + a_3 x_{1(t-2)} + \dots$$

mit konstanten  $a_\nu$ . Formal ergibt sich in üblicher Weise  $|B| x_{jt} = |E_j|$ , wo  $|B| = |\beta_{ij}|$  und  $|E_j|$  aus  $|B|$  durch Substitution der  $\beta_{ij}$  durch  $y_{it}$  entstehen. Erst wenn die  $|E_j|$  bestimmte Bedingungen erfüllen, können die Folgen  $x_{\nu t}$  als aus einer homogenen Familie von Folgen gewonnenen angesehen werden.  $y_\nu = \text{const.}$  und daher  $|E_j| = \text{const.}$  führen z. B. auf die bis auf eine Konstante gleichen rekursiven („autoregressive“ i. Text) Gleichungen  $|B| x_{it} = K_i$ . — Ist  $y_{jt} = k_j + \varepsilon_{jt}$  ( $\varepsilon_{jt}$  „zufällig“ in  $t$  mit Korrelation 0), so folgen  $|B| x_{jt} = y_{jt}$  mit zufällig“ um 0 verteilten  $\nu$  und Korrelation 0 für alle Zeitverschiebungen. — Kann angenähert geschrieben werden:  $x_{jt} = a \cdot x_{j(t-1)} + \delta_{jt}$ , dann wird nur ein kleiner Prozentsatz der  $\delta$  eine Selbstkorrelation  $\varrho_{jr} \neq 0$  [gemessen durch  $\varrho_{jr} = \left( \sum_t \delta_{jt} \cdot \delta_{j(t-r)} \right) / \sum \delta_{jt}^2$  für eine Zeitverschiebung  $r > 1$  haben.

Daraus folgt für die  $x$  die Selbstkorrelation  $r_{j1} = (a + \varrho_1(1 + a^2)) / (1 + 2a\varrho_1)$ ,  $r_s = a \cdot r_{s-1}$ . — Von den empirischen Zeitfolgen  $x_i$  werden Werte des Korrelationsmaßes

$$r_s = n \left( \sum_1^{(n-s)} (x_i - \bar{x})(x_{i+s} - \bar{x}) \right) / \left( (n-s) \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 \right), \quad \bar{x} = \frac{n}{1} x_i / n,$$

berechnet und mit ihnen Korrelogramme [enthaltend die Punkte ( $s$ ;  $r_s$ ) und deren geradlinige Verbindungen] gezeichnet. Zusammenstellung in ausführlichen Tabellen und Diagrammen. Gleiche Untersuchungen für die 1. Differenzen der Folgen. — Vergleichung aller Maße der empirischen Zeitfolgen mit denen einer einzigen „theoretischen“ Familie führt zur eingangs mitgeteilten Differenzengleichung.

Rudolf Günther (Nordhausen).

## Geometrie.

### Nichteuklidische Geometrie:

Conway, A. W.: Application of quaternions to rotations in hyperbolic space of four dimensions. Proc. R. Soc., London, A **191**, 137—145 (1947).

In einem ebenen 4-dimensionalen Raum läßt sich eine allgemeine Drehung aus zwei ebenen Drehungen in orthogonalen Ebenen kommutativ zusammensetzen. Um ein entsprechendes Ergebnis für den 4-dimensionalen Minkowski-Raum  $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$  herzuleiten, werden die 4-Vektoren durch Quaternionen  $q = t + \alpha x + \beta y + \gamma z$  (mit  $\beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha$ ,  $\alpha^2 = -1$ , usw.) dargestellt. Es wird zunächst ein 4-Bein  $q_r$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) mit paarweise bezüglich des Hyperkegels  $C_3$ :  $S q^2 \equiv t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$  reziproken 4-Vektoren

$$S q_r q_s = t_r t_s - x_r x_s - y_r y_s - z_r z_s = 0, \quad r \neq s$$

und der Normierung  $S q_1^2 = -S q_2^2 = -S q_3^2 = -S q_4^2 = 1$  aufgestellt, wobei zwei Möglichkeiten je nach dem Wert der Hamiltonfunktion  $(q_1 q_2 q_3 q_4) = \pm 1$  zu unterscheiden sind. Sind  $q_r$  und  $q'_r$  zwei gleichartige 4-Beine, so wird ihnen die lineare Funktion

$$f(q) = q'_1 S q q_1 - q'_2 S q q_2 - q'_3 S q q_3 - q'_4 S q q_4$$

zugeordnet, und die vorliegende Arbeit behandelt die Eigenschaften und die Darstellungsmöglichkeiten dieser „Drehungsfunktion“  $f$ . Es gibt 4 Eigenvektoren  $a_r$  mit  $f(a_r) = x_r a_r$  und  $x_2 = x_1^{-1}$ ,  $x_4 = x_3^{-1}$ , wobei jeder 4-Vektor in der Ebene  $\{a_1, a_2\}$  reziprok zu jedem 4-Vektor der Ebene  $\{a_3, a_4\}$  ist und die  $a_r$  auf dem Hyperkegel  $C_3$  liegen. Eine Ebene  $\{a_1, a_2\}$  schneidet  $C_3$  reell, die andere imaginär. Da in jeder Ebene eine einparametrische Schar reziproker Paare von 4-Vektoren bestimmt werden kann, läßt sich die allgemeine Drehung kommutativ aus einer „hyperbolischen“ Drehung in der Ebene  $\{a_1, a_2\}$  und einer „zirkularen“ Drehung in der anderen reziproken Ebene zusammensetzen. Im Hinblick auf die Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie wird  $f$  noch in einer anderen Weise durch Aufspalten in zeitartige und raumartige Bestandteile mit Eulerschen Winkeln dargestellt und die Beziehungen zu der früheren Form hergestellt. — Die uneigentliche Drehungsfunktion mit der Invariante  $-1$  wird ebenfalls kurz behandelt. *Weise.*

### Elementargeometrie:

Moorthy, T. Narayana: On the circumcircles of rectangles inscribed in a triangle. Math. Student, Madras **16**, 33—34 (1949).

Einem Dreieck  $ABC$  lassen sich drei Systeme von Rechtecken einbeschreiben, deren jedes einer Seite (oder einer Höhe) zugeordnet ist. Die Umkreise dieser Rechtecke bilden drei Systeme, deren Eigenschaften Verf. untersucht. Die Mittelpunkte der Kreise jedes Systems liegen auf der Verbindungsgerade der Mitten der zugeordneten Seite und Höhe des Dreiecks. Die Kreise jedes Systems berühren einen Mittelpunktskegelschnitt doppelt.

*Zacharias* (Quedlinburg).

Thébault, Victor: Sur des coniques associées à un triangle. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I **63**, No. 2, 74—80 (1949).

In dem Dreieck  $ABC$  seien  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  die Höhen.  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  seien die Lote von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$ . Dann gibt es drei Ellipsen  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ , die die Seiten  $AC$  und  $AB$ ,  $BA$  und  $BC$ ,  $CB$  und  $CA$  in  $B'$  und  $C'$ ,  $C'$  und  $A'$ ,  $A'$  und  $B'$  berühren, mit den Brennpunkten  $A'$  und  $A''$ ,  $B'$  und  $B''$ ,  $C'$  und  $C''$ . Ihre Hauptachsen sind dem halben Umfang des Dreiecks  $A'B'C'$  gleich, und ihre Nebenachsen sind den Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  umgekehrt proportional. Verf. untersucht im ersten Teil seiner Arbeit die Eigenschaften dieser zuerst von E. Bertrand [Mathesis, Bruxelles, II. S. **2**, 130—134 (1892)] angegebenen Ellipsen. Der zweite Teil bringt Eigenschaften der Kegelschnitte  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ ,  $(D)$ , die den Dreiecken

$BCD, CDA, DAB, ABC$  eines vollständigen Vierecks  $ABCD$  einbeschrieben sind und deren erste Brennpunkte  $A, B, C, D$  sind. Die zweiten Brennpunkte von je dreien dieser Kegelschnitte fallen mit den Spiegelbildern des zweiten Brennpunktes des vierten Kegelschnittes bezüglich der Seiten des ihm umschriebenen Dreiecks zusammen, und sie liegen auf dem Leitkreis bezüglich des ersten Brennpunktes des vierten Kegelschnittes. Verf. schließt mit dem Hinweis auf die Möglichkeit einer Ausdehnung auf den Raum.

Zacharias (Quedlinburg).

**Thébault, Victor:** Sur le quadrangle inscrit à un cercle. Math. Gaz., London 33, 116—120 (1949).

In einem konvexen Viereck  $ABCD$ , das einem Kreis  $(O, R)$  einbeschrieben ist, seien  $BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'$ . „Medianen“ nennt Verf. die Geraden, die die Ecken  $A, B, C, D$  mit den Schwerpunkten  $G_a, G_b, G_c, G_d$  der Dreiecke  $BCD, CDA, DAB, ABC$  verbinden. Sie werden durch den Eckenschwerpunkt  $G$  von  $ABCD$  im Verhältnis 3:1 geteilt. Das Spiegelbild  $\Omega$  von  $O$  bezüglich  $G$  heißt das Antizentrum des Vierecks. In einem beliebigen Viereck  $ABCD$  treffen die Kreise über den Medianen als Durchmesser die orthoptischen Kreise der Steinerschen Inellipsen der Dreiecke  $BCD, \dots$ , in 8 Punkten eines Kreises („Achtpunktekreis“) um  $G$  mit dem Radiusquadrat  $\sigma^2 = \frac{1}{48} \sum (a^2 + a'^2)$ . In dem Kreisviereck  $ABCD$  liegen die Schwerpunkte  $G_a, \dots$  mit den Punkten  $A_0, B_0, C_0, D_0$ , die die Strecken  $\Omega A, \dots$  im Verhältnis 1:3 teilen, und mit den Punkten  $A'_0, \dots$ , die die Verlängerungen von  $A\Omega, \dots$  über  $\Omega$  bis zum Umkreis im Verhältnis 1:3 teilen, auf einem Kreis  $(\omega, \frac{1}{3}R)$ , dessen Mittelpunkt  $\omega$  die Strecke  $G\Omega$  im Verhältnis 1:3 teilt. In dem Kreisviereck  $ABCD$  sind die Kreise über den Medianen als Durchmesser, die orthoptischen Kreise der Steinerschen Inellipsen der Dreiecke  $BCD, \dots$  und der Achtpunktekreis  $(G, \sigma)$  orthogonal zu einem Kreis  $(\Omega, \varrho)$  mit  $\varrho^2 = R^2 - \frac{1}{12} \sum (a^2 + a'^2)$ . Die orthoptischen Kreise der Steinerschen Inellipsen sind orthogonal zu den Kreisen über den Durchmessern  $A\Omega, \dots$ . Die Kreise  $(O, R), (\Omega, \varrho), (G, \sigma)$  und der „orthozentroidale“ Kreis über  $G\Omega$  als Durchmesser gehören einem Büschel  $(F)$  an. Die Endpunkte der zu  $\Omega G_a, \dots$  senkrechten Durchmesser der orthoptischen Kreise der Steinerschen Inellipsen von  $BCD, \dots$  liegen auf einem Kreis  $(\Omega_1, \tau)$  mit  $\tau^2 = \frac{1}{9} [R^2 + \frac{1}{4} \sum (a^2 + a'^2)]$ , wo  $\Omega_1$  das Antizentrum des Vierecks  $G_a G_b G_c G_d$  ist. Der Kreis  $(\Omega_1, \tau)$  gehört dem Büschel  $(F)$  an.

Zacharias (Quedlinburg).

**Thébault, Victor:** Sphères remarquables associées à un polygone gauche. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 149—162 (1947).

Jeder Ecke  $A_i$  eines vollständigen windschiefen  $n$ -Ecks  $(P) \equiv A_1 A_2 \dots A_n$  lasse man das  $(n-1)$ -Eck  $(P_i)$  der übrigen Ecken entsprechen.  $G$  und  $G_i$  seien die Eckenschwerpunkte von  $(P)$  und  $(P_i)$ . Dann gilt der Fundamentalsatz: Die Punkte  $M$ , für die  $\sum \overline{MA_i}^2 = K^2$  ist, wo  $K^2$  die Summe der Quadrate  $\overline{A_i A_k}^2 (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; i \neq k)$  bedeutet, liegen auf der Grundkugel  $(G, \sigma_P)$  mit  $\sigma_P^2 = (n-1) \cdot K^2 : n^2$ . — Sei  $(p) \equiv G_1 G_2 \dots G_n$  das „komplementäre“ Polygon von  $(P)$  und  $(p_i)$  das komplementäre Polygon von  $(P_i)$ . Dann gilt der Satz: Die Kugel  $(a_i)$  über dem Durchmesser  $A_i G_i$ , die Grundkugeln  $(G, \sigma_P)$  von  $(p)$  und  $(G, \sigma_{p_i})$  von  $(p_i)$  gehören einem Büschel  $(F_i)$  an. — Liegen die Ecken des Polygons auf einer Kugel  $(O, R)$ , so schneiden sich die Ebenen durch den Schwerpunkt von irgend  $n-2$  Ecken senkrecht zur Verbindungsgerade der beiden übrigen Ecken in einem Punkt  $\Omega$ . Transformiert man die Schnittpunkte der Geraden  $A_i \Omega$  mit der Umkugel  $(O, R)$  durch die Homothetie  $(\Omega, 1:n-1)$ , so liegen die  $2n$  transformierten Punkte mit den  $n$  Punkten  $G_i$  auf einer „ $3n$ -Punkte-kugel“ (entsprechend der Zwölfpunkte-kugel beim Tetraeder). Als „Kugel von Longchamps“ bezeichnet Verf. eine Kugel  $(\omega, \varrho)$ , deren Mittelpunkt mit dem Spiegelbild von  $\Omega$  bezüglich  $O$  zusammenfällt und für die  $\varrho^2 = (n-1) [4(n-1) R^2 - K^2]$   $(n-2)^2$  ist. Wegen weiterer Folgerungen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Zacharias (Quedlinburg).



**Puig Adam, P.: Kritische Betrachtung der Theorie der Äquivalenz von Polygonen.**

Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 10—20 (1947) [Spanisch].

Verf. kritisiert zunächst die Hilbertschen Definitionen der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von Polygonen. An dem Begriff eines Polygons als Summe mehrerer Polygone hat er auszusetzen, daß es Polygone gibt, die sich nicht derart zusammensetzen lassen, daß ihre Umfänge eine Strecke gemein haben (z. B. das von der äußeren Begrenzung eines Sternfünfecks begrenzte Polygon und ein regelmäßiges Zehneck, dessen Seite größer ist als die Entfernung zweier Nachbarecken des Sternfünfecks). Unverständlich erscheint Ref. der weitere Einwand (S. 13—14), aus den Voraussetzungen folge nicht, daß durch Zusammenfügung zerlegungsgleicher Polygone wieder zerlegungsgleiche Polygone entstehen, wie Hilbert mit Recht ohne Beweis behauptet (aus  $V_1$  zerl.-gl.  $V_2$  und  $V_3$  zerl.-gl.  $V_4$  folgt  $V_1 + V_3$  zerl.-gl.  $V_2 + V_4$ ). Auf der nächsten Seite (S. 15) benutzt Verf. die hier bemängelte Behauptung selbst bei seinem Beweis der Additivität der Ergänzungsgleichheit, den Hilbert als trivial weggelassen hat. Zum Schluß schlägt Verf. eine neue Definition der Äquivalenz von Polygonen vor, die beide Definitionen der Gleichheit von Hilbert als Sonderfälle enthält. Zwei Polygone sollen äquivalent (gleich) heißen, wenn es möglich ist, eins von ihnen (oder ein ihm kongruentes) zu erhalten, indem man zu dem andern eine algebraische Summe gewisser Polygone derart hinzufügt, daß die additiven Polygone den subtraktiven paarweise gleich sind:  $P$  ist äquivalent  $Q$ , wenn Paare kongruenter Polygone  $p \equiv p', q \equiv q', \dots, t \equiv t'$  existieren, so daß z. B.  $P + q - r + t - p + \dots - t' + p' - q' + r' \equiv Q$  ist. Verf. beweist, daß seine Definition in der Tat die Definitionen der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit einschließt und daß sie die Eigenschaften der Identität, Reziprozität, Transivität und Additivität besitzt.

Zacharias (Quedlinburg).

**Hadwiger, H.: Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionalen.** Arch. Math., Karlsruhe 1, 468—472 (1949).

$K$  désigne un système fini de simplexes (tétraèdres) orientés  $s_i$  définis à un déplacement près:  $K = s_1 + s_2 + \dots + s_p$ . L'égalité entre  $K$  représentée par  $\sim$  est l'égalité au morcellement (Zerlegungsgleichheit). La multiplication de  $K$  par  $\lambda$  correspond à une similitude des  $s_i$  de rapport  $\lambda$ . L'ensemble  $\mathfrak{K}$  des  $K$  est un espace vectoriel. Un „polyèdre  $K$ “ est un polyèdre au sens classique si les  $s_i$  sont positifs et vérifient les conditions habituelles d'incidence. L'A. désigne par  $\pi$  toute fonction numérique réelle définie sur  $\mathfrak{K}$  et vérifiant I.  $\pi(K) = \pi(K')$  si  $K \sim K'$ , II.  $\pi(K_1 + K_2) = \pi(K_1) + \pi(K_2)$ . Il énonce sans démonstration les résultats suivants: Il existe une seule fonction  $\pi$  non négative, égale à 1 sur le cube unité, à savoir le volume algébrique  $J(K)$ . — Toute fonction  $p$  telle que  $\pi(\lambda A)$  soit une fonction continue de  $\lambda$  est  $= cJ +$  fonctionnelle linéaire sur  $\mathfrak{K}$ ,  $c$  désignant une constante. Pauc.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Sz.-Nagy, Gyula: Gleichseitige Hyperbel und Parallelogramme.** Publ. Math., Debrecen 1, 24—28 (1949).

Verf. beweist mit ähnlichen Methoden wie in seiner Arbeit über allgemeine Lemniskaten (dies. Zbl. 31, 69) den Satz: Ist  $A_1 B_1 A_2 B_2$  ein Parallelogramm, so ist der Ort aller Punkte  $P$ , für die  $P\bar{A}_1 \cdot P\bar{A}_2 = P\bar{B}_1 \cdot P\bar{B}_2$  gilt, eine gleichseitige Hyperbel (welche im Falle eines Rechteckes in dessen Mittelparallelen zerfällt). Ferner werden gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrammes, das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben ist, von irgendeinem Punkt dieser Hyperbel unter gleichen oder supplementären Winkeln gesehen. Ist  $A_1 B_1 A_2 B_2$  ein allgemeines Viereck, so führt dasselbe Problem auf eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung. Schließlich folgt, daß die Potenzlinie von 2 Cassinischen Kurven mit gleichem Radius und Symmetriezentrum eine gleichseitige Hyperbel ist (die zu dem Parallelogramm gehört, welches von den 4 Mittelpunkten der Cassinischen Kurven gebildet wird).

Gröbner (Innsbruck).

**Baker, H. F.: The dual of a theorem proved by F. Morley.** Bull. Calcutta math. Soc. 40, 226—228 (1948).

Der zitierte Satz bezieht sich auf ein räumliches Sechseck [Bull. Calcutta math. Soc. 37 (1945), 38 (1946)]. Verf. beweist den dualen Satz, nämlich: Sechs Erzeugende  $e_i$  eines Kegels zweiten Grades ergeben, beliebig gepaart, eine Pascalsche Ebene  $\omega$ .

Drei weitere Pascalsche Ebenen  $\lambda, \mu, \nu$  können  $\omega$  durch eine bestimmte Vertauschungsvorschrift zugeordnet werden. Entsprechende Gegenseiten jedes windschiefen Sechsecks, dessen Eckpunkte auf den Geraden  $e_i$  liegen, schneiden die drei genannten Ebenen in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden  $l, m, n$  einer Regelfläche zweiten Grades angehören;  $\omega$  berührt diese Fläche. *H. Horninger.*

### Algebraische Geometrie:

**Tanturri, Giuseppe:** Sistemi lineari di  $C^n$  piane i cui punti base sono flessi di ordine  $n - 2$ . Rend. Sem. mat., Torino 8, 241—251 (1949).

Die linearen Scharen der ebenen kubischen Kurven, die in einem Basispunkt oder in mehreren einen Wendepunkt haben, sind von Margherita Calvi studiert worden [Giorn. Mat. Battaglini 72, 71—75 (1934); dies. Zbl. 9, 370]. Diese Untersuchung wird vom Verf. ausgedehnt auf lineare Scharen von ebenen algebraischen Kurven einer beliebigen Ordnung  $n$ , die in einem Basispunkt oder in mehreren einen Wendepunkt der Ordnung  $n - 2$  haben, d. h. daselbst eine  $n$ -punktige Berührung mit der Tangente aufweisen. Verf. bezeichnet diese Punkte als  $F_{n-2}$ . Die Ergebnisse sind ziemlich einfach und können folgendermaßen zusammengestellt werden: Die linearen Scharen von  $C^n$  mit Wendepunkten  $F_{n-2}$  in den Basispunkten sind: a)  $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3) + 1$ -dimensionale Scharen mit  $m \leq n$  Punkten  $F_{n-2}$  in ebenso vielen Basispunkten mit festen Tangenten; b)  $n + 2$ -dimensionale Scharen mit Punkt  $F_{n-2}$  in einem Basispunkt mit variabler Tangente; c) Bündel von  $C^n$  mit  $m \leq n$  kollinearen Basispunkten, die Punkte  $F_{n-2}$  sind und von denen ein einziger eine variable Tangente hat: für die kubischen Kurven ist  $m = 3$ , sonst  $2 \leq m \leq n$ ; d) Bündel von  $C^n$  mit zwei Punkten  $F_{n-2}$  in Basispunkten mit variablen Tangenten, wobei  $n > 3$ ; e) Bündel von  $C^3$  mit drei kollinearen Basispunkten, die Wendepunkte sind mit variablen Tangenten; f) Büschel von  $C^4$  mit drei Ondulationspunkten und variablen Tangenten in unabhängigen Basispunkten; g) syzygetisches Büschel (von  $C^3$ ); außerdem die weniger ausgedehnten Scharen, die in den genannten enthalten sind und keine weiteren Basispunkte vom Typus  $F_{n-2}$  haben. — Die Fälle f) und g) bilden die einzigen Beispiele von drei (oder mehreren) untereinander unabhängigen Wendepunkten der maximalen Ordnung, in denen die Tangenten variabel sind.

*J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

**Fano, Gino:** Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. Comment. Pontificia Acad. Sci. 11, 635—720 (1947).

Die vorliegende umfangreiche und tiefeschürfende Arbeit bildet den Schlußstein zu einer großen Reihe von Untersuchungen desselben Verf., die sich bis auf 40 Jahre zurückerstrecken und ursprünglich von der Frage ausgegangen sind, ob die allgemeine Mannigfaltigkeit  $V_3^3$  des 4-dimensionalen projektiven Raumes  $R_4$ , d. h. die durch eine allgemeine Form 3. Grades in 5 homogenen Variablen dargestellte Mannigfaltigkeit, rational sei (d. h. in eindeutiger Korrespondenz mit einem  $R_3$  stehe) oder nicht; diese noch immer offene Frage hat Verf. nun endgültig im negativen Sinn entschieden. — Schon 1908 [Atti Accad. Sci. Torino 43, 973—984 (1908)] bewies Verf. die Irrationalität der allgemeinen  $M_4^3$  des  $R_4$  und der  $M_5^6$  des  $R_5$  und zeigte [Ann. Mat. pura appl., III. S. 24, 49—88 (1915)], daß jede 3-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit rational ist, wenn sie ein lineares System rationaler Flächen eines Grades  $> 3$  enthält. Später [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. 11, 329—335 (1930)] stellte Verf. fest, daß die  $M_3^{14}$  des  $R_9$  ( $p = 8$ ), die als allgemeiner linearer Schnitt der Graßmannschen Mannigfaltigkeit der Geraden des  $R_5$  gewonnen wird, birational äquivalent mit der  $V_3^3$  des  $R_4$  ist. Eine neue Reihe von Untersuchungen enthalten die Arbeiten der Jahre 1936—42 [dies. Zbl. 15, 123 und 372; 16, 133; 26, 74 und 256], in welchen die Mannigfaltigkeiten  $M_3^{2p-2}$  des  $R_{p+1}$  untersucht werden, deren Schnittkurven mit linearen  $R_{p-1}$

kanonisch sind vom Geschlecht  $p$  und der Ordnung  $2p - 2$ , die ferner singularitätenfrei sind und nur solche Flächen enthalten, welche vollständige Schnitte mit Hyperflächen sind. Verf. zeigte, daß diese Mannigfaltigkeiten nur für  $p \leq 37$  existieren und für  $p = 7$ ,  $p \geq 9$  rational sind. In der vorliegenden Arbeit nun beweist Verf., daß diese Mannigfaltigkeiten unter den gemachten Voraussetzungen in den übrigen Fällen, insbesondere in den Fällen  $p = 5, 6, 8$ , die bisher noch zweifelhaft waren, irrational und untereinander birational inäquivalent sind. Die genannten Voraussetzungen sind dabei, wie Verf. zeigt, wesentlich. Hinsichtlich der ziemlich verwickelten Beweisführung muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. *Gröbner.*

**Godeaux, Lucien:** Sur les surfaces circonscrites à une surface cubique. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 110—119 (1947).

Gesucht werden die Flächen  $F$  der Ordnung  $2n$  des  $\mathfrak{P}_3$ , die eine vorgegebene irreguläre Fläche  $\Phi$  dritter Ordnung längs einer Kurve  $C$  der Ordnung  $2n$  berühren. Um einen trivialen Fall auszuschließen, wird noch verlangt, daß  $C$  nicht auf einer Fläche der Ordnung  $2n$  liegen soll. Dann muß notwendig erstens  $\Phi$  vier konische Doppelpunkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  besitzen und zweitens  $F$  eine ungerade Anzahl von Malen durch diese vier Doppelpunkte  $P_i$  von  $\Phi$  hindurchgehen. Schließlich darf die Anzahl der Doppelpunkte von  $F$  auf  $C$  höchstens  $3n(2n - 3) - 4n_2 + 4$  sein.

Dabei ist  $n = \sum_{i=1}^4 v_i' + 2$  und  $2v_i'$  die Vielfachheit von  $F$  in  $P_i$ . Verf. zeigt, daß es unter den obigen notwendigen Bedingungen für  $\Phi$  so eine Kurve gibt. *E.-A. Behrens.*

**Godeaux, Lucien:** Sur l'existence de certaines surfaces doubles. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 128—133 (1947).

Im Punkte  $O = [1, 0, 0, 0]$  des  $\mathfrak{P}_3$  hat die Fläche

$$\Phi \equiv x_4^4 \varphi_{n-4}(x_1, x_2, x_3) + x_4^3 \varphi_{n-3} + x_4^2 \varphi_{n-2} + x_4 \varphi_{n-1} + \varphi_n = 0$$

vom Grade  $n$  einen mehrfachen Punkt der Ordnung  $n - 4$ . Eine Gerade  $p$  durch  $O$  schneidet  $\Phi$  in vier weiteren Punkten, die man auf drei Arten in je zwei Paare aufteilen kann. Jede solche Aufteilung bestimmt auf  $p$  eine Involution, bei der dem Punkt  $O$  der Punkt  $P$  entsprechen möge. Alle diese Punkte  $P$  durchlaufen eine Fläche  $F$ , die von jeder Geraden durch  $O$  in drei Punkten geschnitten wird. — Es handelt sich um die Untersuchung dieser Fläche  $F$ . Ihre Gleichung lautet

$$3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_4^4} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right)^2 - 2 \Phi \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_4^3} \right)^2 = 0,$$

sie hat den Grad  $3n - 6$  und in  $O$  einen  $(3n - 9)$ -fachen Punkt. Sie besitzt eine Doppelkurve  $D$  des Grades  $(n - 1)(n - 3)$  mit den Gleichungen  $\partial \Phi / \partial x_4 = 0$ ,  $\partial^3 \Phi / \partial x_4^3 = 0$ . Nach de Jonquières läßt sie sich birational auf eine Fläche  $F'$  transformieren, wobei das Bild von  $D$  eine ebene Doppelkurve  $D'$  wird. Diese Fläche  $F'$  läßt sich birational auf eine Fläche  $F_0$  im  $\mathfrak{P}_{(n-2)(2n-3)}$  vom Grade  $12(n - 3)^2$  abbilden.  $F_0$  besitzt eine Schnittkurve mit einer Hyperebene, längs derer sie von einer weiteren Hyperebene berührt wird und auf der  $12(n - 3)^2$  konische Doppelpunkte liegen. *Ernst-August Behrens* (Hamburg).

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

**Zeuli, Tino:** Su di una notevole proprietà del rotore di un campo vettoriale. Rend. Sem. mat., Torino 8, 223—225 (1949).

Verf. zeigt: In einem Vektorfeld  $\mathfrak{B}$  sind die Wirbellinien (d. h. die Feldlinien des Feldes rot  $\mathfrak{B}$ ) dadurch charakterisiert, daß für jeden Bogen  $AB$  einer solchen

Linie die Variation des (Arbeits-, Zirkulations-) Integrals  $\int_A^B \mathfrak{B} dx$  verschwindet.

*Schönhardt* (Stuttgart).

**Figueras Calsina, E.:** Verteilung der Überbeschleunigungen bei einer starren sphärischen Bewegung. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 155—164 (1948) [Spanisch].



Als „Überbeschleunigung“ (sobreacteración) wird die dritte Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit bezeichnet. Durch Ableitung der vektoriellen Formel für die Verteilung der Beschleunigungen für eine in sich bewegte Kugel wird die Verteilung dieser Überbeschleunigungen bei einem zwangsläufigen Bewegungsvorgang untersucht. Dann wird zunächst festgestellt, wann es Punkte auf der Kugel gibt, in denen diese Überbeschleunigung verschwindet, und wie sie verteilt sind. Schließlich wird die Überbeschleunigung in naturgemäßer Weise in Komponenten zerlegt und ermittelt, wo eine solche Komponente verschwindet. *W. Blaschke* (Hamburg).

**Pírko, Zdeněk:** Remarque sur la théorie des roulettes. Časopis Mat. Fysiky, Praha 74, D63—D70 (1949) [Tschechisch].

Dans cet article nous traitons du point de vue de la géométrie cinématique le problème suivant: Etant donnée un profil plan  $\Pi_1$ , déterminer un autre profil  $\Pi_2$  de la manière, que le roulement de  $\Pi_1$  suivant  $\Pi_2$  (ou inversement) peut être réalisée par une simple translation suivant une ligne droite donnée ou bien par une simple rotation suivant un cercle donnée. Nous démontrons à l'aide des équations convenablement choisies que nous appelons les conditions de position et celles du mouvement, que la résolution de tous ces problèmes est ramenée à des quadratures. (Autoreferat.)

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Tigano, O.:** Sulla determinazione delle curve di Mannheim. Mat., Catania 3, 25—29 (1948).

Als Kurven von Mannheim werden diejenigen bezeichnet, für die zwischen der Krümmung  $1/\rho$  und der Torsion  $1/\tau$  die quadratische Beziehung besteht  $1/\rho^2 + 1/\tau^2 = 1/h\rho$ , wo  $h$  eine Konstante ist. Mittels der Transformation von Combescure, auf die beliebige Kurve  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ,  $\mathbf{r}'(s)^2 = 1$  angewendet, erhält Verf. die Darstellung:  $\mathbf{r}(s) = \int \mathbf{r}'(s) f(s) ds$ , wo  $f(s) = h\rho(1/\rho^2 + 1/\tau^2)$  ist [ $\rho, \tau$  sind die zu  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  gehörigen Krümmungs- bzw. Torsionshalbmesser], oder:

$$x = \int \cos u(s) \cos v(s) f(s) ds, \quad \bar{y} = \int \sin u(s) \cos v(s) f(s) ds, \quad z = \int \sin v(s) f(s) ds.$$

Volk (Würzburg).

**Tigano, O.:** Sopra una classe di superficie che corrispondono per ortogonalità di elementi lineari ad una superficie di rotazione. Mat., Catania 3, 30—33 (1948).

Ist (1)  $\bar{x}_1 = u \sin v$ ,  $\bar{x}_2 = u \cos v$ ,  $\bar{x}_3 = f(u)$  die Parameterdarstellung einer Rotationsfläche, so genügen die  $\bar{x}_i$  der Laplaceschen Gleichung (2)  $\partial^2 \bar{x}_i / \partial u \partial v = u^{-1} \partial \bar{x}_i / \partial v$  mit gleichen Invarianten, und die Parameterkurven bilden ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten. (2) ist die Integrabilitätsbedingung für das System

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial u} = -\frac{1}{u} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial v} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v};$$

die Laplacesche Gleichung (4)  $\partial^2 \bar{x}'_i / \partial u \partial v = -u^{-1} \partial \bar{x}'_i / \partial v$ , die ebenfalls gleiche Invarianten hat, ist die Transformierte von (2) mittels (3). Durch die Substitution  $\bar{x}'_i = u^{-1} \xi$  läßt sich (4) auf die kanonische Form von Moutard  $\partial^2 \xi / \partial u \partial v = 0$  bringen, woraus sich mittels der Lelievreschen Formeln die Koordinaten einer Fläche  $S$  (bezogen auf ihre Asymptotenlinien) mit zu den Bogenelementen von (1) orthogonalen Bogenelementen ergeben:

$$(5) \quad x_i = A_k B_l - A_l B_k - (A_k A_l - B_k B_l) + 2 \int (A_l A'_k du - B_l B'_k dv)$$

( $i = 1, 2, 3; k = 2, 3, 1; l = 3, 1, 2$ ),

wo die  $A_k, A_l$  Funktionen nur von  $u$  und die  $B_k, B_l$  solche nur von  $v$  sind.

Volk (Würzburg).

**Giuliano, S.:** Sulle superficie che si corrispondono per ortogonalità di elementi lineari. Mat., Catania 3, 34—39 (1948).

Es werden zur Fläche  $x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$  bzw.  $z = x^m y^n$  ( $\alpha, \beta, \gamma; m, n$  reelle Kon-

stante) die Flächen mit orthogonalen Bogenelementen aufgesucht. Die Koordinaten der gesuchten Flächen lassen sich mittels einer Funktion  $\Theta$  darstellen, wo  $\Theta$  einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu genügen hat. Im parabolischen Falle ( $m + n - 1 = 0$ ) läßt sich  $\Theta$  als allgemeines Integral dieser Differentialgleichung mittels eines Zwischenintegrals leicht bestimmen. Im hyperbolischen Falle wird die Differentialgleichung durch eine Transformation auf die Form  $\partial^2 \Theta' / \partial u \partial v = \Theta'$  gebracht. Schließlich werden die Fälle  $\gamma = 0$  und  $m = n - 1$  betrachtet.

Volk (Würzburg).

Chariar, V. R.: On the skewness of distribution of the generators of a ruled surface. Proc. Indian Acad. Sci. A 30, 49—55 (1949).

In einer früheren Arbeit [Bull. Calcutta math. Soc. 36 (1944)] führte Verf. ein Maß  $\mu$ , genannt „skewness of distribution“, für das Abweichen (im Kleinen) einer Regelfläche von einer solchen mit Richtebene ein. Es wird nun gezeigt: Für festes  $\mu$  ist der Richtkegel der Regelfläche ein Drehkegel; ist außerdem noch die Striktionslinie eine geodätische Linie der Regelfläche, so ist sie eine Schraublinie (oder Gerade). Beltramis Aussagen über geradlinige  $W$ -Flächen werden unter Verwendung des Begriffes „skewness“ beleuchtet, sowie jene Regelflächen untersucht, deren oskulierende Quadriken gleichseitige Hyperboloide sind. Für diese Regelflächen gilt  $2\mu = \pm \cotg \theta$ , wenn die Striktionslinie die Erzeugende unter dem Winkel  $\theta$  schneidet. Schließlich wird noch der Zusammenhang zwischen der Laguerreschen Funktion entlang einer Kurve auf einer Fläche und der Größe  $\mu$  der von den Flächennormalen längs dieser Kurve gebildeten Regelfläche betrachtet. H. R. Müller.

Goldoni, Gino: Sulle varietà applicabili. Atti Sem. mat. fisico Univ., Modena 3, 205—206 (1949).

Elementarer Beweis für den Satz: Sind  $V_n, V'_n$  zwei abwickelbare Mannigfaltigkeiten in einem Euklidischen  $S_N$  ( $n < N$ ) und  $Q, Q'$  Paare von entsprechenden Punkten, so daß  $dQ'^2 = dQ^2$ ,  $dQ' = \lambda dQ$ , so ist das Oberflächendifferential  $d_\nu \lambda$  gleich Null.

Volk (Würzburg).

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Trevisan, Giorgio: Una condizione di allineamento per gli insiemi finiti di punti del piano euclideo. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 258—261 (1949).

Es wird folgender Satz bewiesen: Eine, nur endlich viele Punkte enthaltende Punktmenge  $\mathfrak{M}$  im euklidischen  $E_n$  liegt ganz in einer Geraden, wenn  $\mathfrak{M}$  folgende Eigenschaft besitzt: Jede Gerade, die 2 Punkte von  $\mathfrak{M}$  verbindet, enthält noch (mindestens) einen weiteren Punkt von  $\mathfrak{M}$ .

Haupt (Erlangen).

Haupt, Otto: Zur Verallgemeinerung des Viereheitelsatzes und seiner Umkehrung. Ann. mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 293—320 (1948).

Diese reichhaltige große Arbeit beweist ausführlich die in einer früheren Arbeit vom Verf. (dies. Zbl. 32, 430) ausgesprochenen Sätze und untersucht eingehend die Notwendigkeit der beim Beweis der einzelnen Sätze gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. — Die bewiesenen Sätze sind weitgehende Verallgemeinerungen des Viereheitelsatzes und seiner Umkehrung in der Form: Ein Konvexbogen  $B$ , der von jedem Kreis in höchstens vier Punkten getroffen wird, der also den zyklischen Ordnungswert Vier hat, besitzt höchstens vier Scheitel. Ein stetig gekrümmtes Oval mit genau vier Scheiteln hat den zyklischen Ordnungswert Vier. Der Satz über die Anzahl der sextaktischen Punkte des Ovals, wobei Ellipsen an die Stelle der Kreise treten, ist ein sehr spezieller Fall des allgemeinen Satzes, wo die Kreise durch gewisse Kurven, Ordnungscharakteristiken  $K$ , ersetzt werden. Statt des Konvexbogens  $B$  bzw. des Ovals ist ein einfacher abgeschlossener Bogen, der Grundbogen bzw. eine einfache geschlossene (beschränkte) Kurve, die Grundkurve, bei den Verallgemeinerungen gegeben. — Die im Falle der zyklischen Ordnung gemachten Differenzierbarkeitsannahmen sind damit äquivalent, daß in jedem Punkt

von  $B$  der (freie) Krümmungskreis existiert und einen von Null verschiedenen Radius besitzt. Der Krümmungskreis ist in einem Punkt  $P$  von  $B$  der Limes von Kreisen durch irgend drei auf  $P$  sich zusammenziehende Punkte von  $B$ . Setzt man die Existenz des Krümmungskreises nicht voraus, so gilt nur der Satz: Ein Oval, das von einem Kreise in  $3t + 1$  Punkten getroffen wird, besitzt mindestens  $t + 1$  Scheitel. Im Falle  $t = 1$  ergibt sich also der Zweischeitelsatz: Jedes Oval besitzt mindestens zwei Scheitel. — Auch dieser Satz wird verallgemeinert. — Bei den Verallgemeinerungen tritt die Forderung der Existenz gewisser durch je einen Punkt der Grundkurve eindeutig bestimmter Kurve  $K$  an die Stelle des Krümmungskreises. — Bezüglich der genauen Angaben der allgemeinen Sätze und ihrer Beweise müssen wir auf die Arbeit verweisen. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

**Haupt, Otto:** Zur geometrischen Kennzeichnung der Scheitel ebener Kurven. Arch. Math., Karlsruhe **1**, 102—105 (1948).

Ein Extremscheitel  $S$  eines ebenen Bogens  $\mathfrak{B}$  ist ein innerer Punkt von  $\mathfrak{B}$ , in dem der Krümmungsradius ein von Null verschiedenes endliches Extremum besitzt. Er ist isoliert, wenn auf  $\mathfrak{B}$  eine Umgebung von  $S$  existiert, die — abgesehen von  $S$  — keinen Extremscheitel enthält. Der Schmiegekreis  $SKR(X)$  von  $\mathfrak{B}$  ist der Limes von Kreisen durch irgend drei auf einen Punkt  $X$  sich zusammenziehende Punkte von  $\mathfrak{B}$ .  $X$  heißt Schmiegepunkt von  $SKR(X)$ . In bezug auf eine Orientierung eines Konvexbogens, der in jedem Punkt genau einen Schmiegekreis besitzt, lassen sich die Monotonität der Schmiegekreise und die gleichartige Lage von zwei Schmiegekreisen definieren.  $\mathfrak{B}$  hat den zyklischen Ordnungswert  $s$ , wenn er mit jedem Kreis höchstens  $s$  und mit einem Kreis genau  $s$  Punkte gemeinsam hat. Für einen Konvexbogen  $\mathfrak{B}'$  (ohne Kreisbogen) von endlichem zyklischem Ordnungswert, der in jedem Punkt genau einen weder in einen Punkt noch in eine Gerade ausgearteten Schmiegekreis besitzt, sind die Aussagen gleichwertig: 1. Es besitzt  $\mathfrak{B}'$  den zyklischen Ordnungswert Drei. 2. Alle Schmiegekreise liegen gleichartig bezüglich  $\mathfrak{B}'$ . 3. Längs  $\mathfrak{B}'$  ändern sich die Schmiegekreise monoton. — Es besitzt  $\mathfrak{B}$  jedenfalls den zyklischen Ordnungswert Drei, wenn  $\mathfrak{B}$  keinen Extremscheitel besitzt und dreimal stetig differenzierbar ist. — Ein Punkt  $Q$  von  $\mathfrak{B}$  ist ein zyklisch ordnungsgeometrischer Scheitel, wenn jede hinreichend kleine Umgebung von  $Q$  auf  $\mathfrak{B}$  mindestens den Ordnungswert Vier besitzt. Ein nicht isolierter zyklisch ordnungsgeometrischer Scheitel braucht kein Extremscheitel zu sein. Ein Extremscheitel ist aber stets ein zyklisch ordnungsgeometrischer Scheitel. *Gy. Sz.-Nagy* (Szeged).

**Colmez, Jean:** Recherches récentes sur les systèmes triples orthogonaux. Rev. sci., Paris **85**, 1061—1062 (1948).

Résumé des résultats obtenus par Bouligand et Llensa dans l'étude des systèmes triples orthogonaux du point de vue de la géométrie infinitésimale directe [Voir référence suivante; en outre: Bouligand, Sur quelques groupements de problèmes, Rev. sci., Paris **82**, 3—14 (1949); Llensa, Thèse de Doctorat, Paris 1947].

*Chr. Pauc* (Le Cap).

**Colmez, Jean:** Systèmes triples orthogonaux paratingents. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 2043—2045 (1948).

Darboux étudiant le problème de l'insertion d'une surface dans un système triple orthogonal, introduisit l'équation aux dérivées partielles  $(E)$ :  $(MO^2 - R^2) \cdot \text{grad } u^2 = 1$ , où  $M$  représente le point  $(x, y, z)$ ,  $O = O(u)$  le centre et  $R = R(u)$  le rayon d'une sphère  $S(u)$  dépendant continuellement du paramètre  $u$ . Les surfaces de niveau des intégrales paratingentes de  $(E)$  ont été étudiées par G. Llensa [Bull. Sci. math., II. S. **65**, 225—250 (1941); C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 297—298 (1945) et **222**, 263—265 (1946); ce Zbl. **26**, 79]. L'A. considère une équation plus générale  $(E')$ :  $|\text{grad } u| = F(M, u)$ , où  $F(M, u)$  désigne une fonction continue en  $u$  et possédant des dérivées du second ordre par rapport à  $x, y$  et  $z$  qui soient continues. Il transpose



à  $(E')$  l'intégrale complète de  $(E)$  à surfaces de niveau sphériques qu'avait utilisée Llena et peut ainsi étendre à  $(E')$  certains résultats obtenus par ce dernier. En outre, il donne une solution partielle à une question posée par Bouligand [Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 35, 57—67 (1933); ce Zbl. 8, 410] concernant une forme généralisée du théorème de Dupin. *Chr. Pauc (Le Cap).*

**Mirguet, Jean:** Convexité et double courbure des orthosurfaces. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 646—648 (1949).

Fortsetzung früherer Untersuchungen (dies. Zbl. 29, 168). Es sei  $\mathfrak{F}$  eine Orthofläche, deren (lineares) Paratingent vom Rang höher als 1 endlich ist. Bezeichnet  $\Delta$  ein  $\mathfrak{F}$  eingeschriebenes Dreieck, dessen Ebene parallel ist zu einer dem (linearen) Paratingent vom Range 1 nirgends angehörigen Geraden, so soll der Radius des Umkreises von  $\Delta$  positiven unteren Limes besitzen, wenn  $\Delta$  sich auf einen festen Punkt  $P \in \mathfrak{F}$  zusammenzieht; und dies soll für jeden Punkt  $P \in \mathfrak{F}$  der Fall sein. Dann ist das Kontingent in jedem Punkt von  $\mathfrak{F}$  eine Ebene. Es sei nun  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  die Menge derjenigen Punkte von  $\mathfrak{F}$ , in denen das Kontingent Stützebene an  $\mathfrak{F}$  ist bzw. in denen  $\mathfrak{F}$  „veritable doppelte Krümmung“ besitzt (d. h. in denen das Paratingent höheren Ranges als 1 genau 2 Geraden enthält) und von dem Kontingent geschnitten wird. Verf. zeigt unter anderem:  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  ist dicht in  $\mathfrak{F}$ . *Haupt (Erlangen).*

**Misra, D. C.:** A property of closed regions. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 83—85 (1949).

„Haben je 2 Punkte eines ebenen, abgeschlossenen, begrenzten Bereiches  $R$  einen Abstand, der höchstens  $2r$  ist, so ist das Flächenmaß von  $R < \pi r^2$ , wenn  $R$  nicht ein Kreis vom Radius  $r$  ist“. Verf. beweist diesen Satz unter den einschränkenden Voraussetzungen: a)  $R$  ist zusammenhängend, b) der Rand  $L$  der konvexen Hülle  $H$  von  $R$  ist zweimal stetig differenzierbar, indem er in üblicher Weise die Stützfunktion von  $H$  bezüglich eines inneren Punktes als Fourierreihe darstellt. — Übrigens folgt der Satz, die Meßbarkeit von  $R$  allein vorausgesetzt, unmittelbar aus dem Cauchyschen Quermaßintegral und der Extremaleigenschaft des Kreises, wenn man die evidente Tatsache berücksichtigt, daß die Breite von  $H$  in jeder Richtung  $\leq 2r$  ist. *Bäbler (Zürich).*

**Sz. Nagy, Gyula v.:** Schwerpunkt von konvexen Kurven und von konvexen Flächen. Portugaliae Math. 8, 17—22 (1949).

„ $d$  sei der Abstand von 2 parallelen Stützgeraden bzw. Stützebenen an eine geschlossene, ebene konvexe Kurve, bzw. an eine geschlossene konvexe Fläche im  $R^3$ ; Kurve und Fläche seien homogen mit Masse belegt, und  $\delta$  bedeute den Abstand des Schwerpunktes vom einen oder andern Stützgebilde; dann gilt für die Kurve  $\frac{1}{4}d < \delta < \frac{3}{4}d$ , für die Fläche  $\frac{1}{6}d < \delta < \frac{5}{6}d$ . Ausgangspunkt der Untersuchungen sind die Formeln a)  $\delta = d/2(1 + \cos \omega)$  bzw. b)  $\delta = d/3(1 + \cos \omega)$  (Druckfehler in den Formeln S. 17, 18). a) für das gleichschenklige Dreieck,  $d$  Höhe,  $\omega$  Basiswinkel,  $\delta$  Abstand von der Basis, b) für die regelmäßige Pyramide, Höhe  $d$ ,  $\omega$  Neigungswinkel der Seiten gegen die Grundfläche  $G$ ,  $\delta$  Abstand von  $G$ . — Um a) zu beweisen, deformiert Verf. die zwischen den parallelen Stützgeraden  $g$  und  $g'$  liegende Kurve  $C$  der Länge  $l$  in ein gleichschenkliges Dreieck vom Umfang  $l$  mit der Spitze auf  $g$  und der Basis auf  $g'$ , indem er zunächst jeden der beiden Bögen  $\widehat{A'A'}$  auf  $C$  in Streckenzüge gleicher Länge,  $A'B'A$  bzw.  $A'B'A$  deformiert, wobei  $A'B'$  und  $A'B'$  auf  $g'$  liegen.  $A$  bzw.  $A'$  sind Stützpunkte auf  $g$  bzw.  $g'$ . Leider übersieht er, daß diese Streckenzüge unter Umständen nicht näher an  $g'$  gelegene Schwerpunkte zu haben brauchen als die entsprechenden Kurvenbögen, wie er zu beweisen glaubt, im Gegenteil, z. B. wenn ein solcher Bogen eine Kettenlinie ist. Der Irrtum überträgt sich auf die Überlegungen bezüglich der Fläche. Die Extrema für  $\delta$  werden in jedem Fall geliefert a) für die Kurve durch das gleichschenklige Dreieck, b) für die Fläche

durch den geraden Kreiskegel, was, wenigstens hinsichtlich der Kurve, auf einfache Weise festgestellt werden kann. *Bäbler (Zürich).*

**Besicovitch, A. S.:** A variant of a classical isoperimetric problem. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **20**, 84—94 (1949).

Two theorems are proved: Theorem I. If the radius of the largest circle inscribed into a simple closed plane curve  $G$  of length  $\lambda > 2\pi$  is 1, then the area bounded by  $G$  is less than or equal to  $\lambda - \pi$ . Theorem II. Given any rectifiable simple arc  $g$  satisfying the conditions: 1.  $g$  has a tangent at all points, which varies continuously as the point varies; 2. the upper curvature of  $g \leq 1$  at all points; 3. the chord of any arc of  $g$  of length  $> \pi$  is greater than 2; then the locus  $G$  of points distant 1 from  $g$  is a simple curve such that the largest circle inscribed into it is of radius 1 and that the area of the region bounded by  $G$  attains the limit given in Theorem I. — The proofs rest on direct infinitesimal considerations. A similar approach to an isoperimetric problem in the plane is to be found in H. Busemann, On the problem of Dido, *Studies Essays*, pres. R. Courant, 63—73 (1948). *Chr. Pauc (Cape Town).*

### Topologie:

**Gottschalk, W. H. and G. A. Hedlund:** The dynamics of transformation groups. *Trans. Amer. math. Soc.* **65**, 348—359 (1949).

Soit  $X$  un espace topologique et  $T$  un groupe topologique d'homéomorphismes de  $X$ ; on suppose  $T$  abélien. Les ensembles  $T \cdot x$  (où  $x \in X$ ) sont les trajectoires de  $T$ . — Les AA. se proposent en premier lieu de définir la récurrence, la presque périodicité, la périodicité, en ne faisant intervenir dans les définitions que les structures topologiques de  $T$  et  $X$ , et la structure algébrique de  $T$ . A cet effet ils introduisent la notion de sous-ensemble extensif de  $T$  ( $A$  est extensif si  $A \cap S \neq \emptyset$ , où  $S \subset T$  est un semi-groupe replet; le semi-groupe  $S$  est replet si pour tout compact  $C \subset T$ , il existe  $t \in T$  tel que  $t \cdot C \subset S$ ) et la notion de sous-ensemble relativement dense. Le point  $x$  sera dit récurrent (ou presque-périodique) si pour tout voisinage  $U$  de  $x$ , il existe un ensemble  $A \subset T$  extensif (ou relativement dense) tel que  $A \cdot x \subset U$ , etc. — Après avoir montré (moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur  $T$ ) que la récurrence est une propriété héréditaire (c'est à dire qu'elle subsiste si on remplace  $T$  par un sous-groupe  $G$  fermé relativement dense, et réciproquement), les AA. énoncent des théorèmes de récurrence topologiques et métriques. Les paragraphes suivants traitent des relations entre la récurrence et la compressibilité, et entre la récurrence et la presque périodicité. Au total les AA. énoncent 9 théorèmes et 4 corollaires. *Reeb (Saverne).*

**Cuesta, N.:** Über den Kurvenbegriff. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. **7**, 249—254 (1947) [Spanisch].

Verf. nennt eine Menge  $T$  eine Trajektorie, wenn 1. in ihr eine totale Ordnung ( $<$ ) und 2. daneben eine Äquivalenz ( $\equiv$ ) definiert ist. Die Ordnung von  $T$  heißt die „Zeit“. Ist sie stetig, so heißt auch  $T$  stetig; ist sie vom Ordnungstyp der reellen Zahlen, so heißt sie Jordansch. Den durch ( $\equiv$ ) im ( $<$ )-Raum erzeugten Zerlegungsraum nennt er Trajektorialraum. Durch mehrere Beispiele werden diese Begriffe erläutert. „Kurve“ werde dann ein Trajektorialraum genannt, wenn er stetig ist und der Menger-Urysohnschen Trennungsbedingung genügt. Ausführliches ist für eine folgende Abhandlung angekündigt. *Aumann (Würzburg).*

**Figueras Calsina, E.:** Über die Nichtäquivalenz der Dimensionen von Menger und von Urysohn. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. **9**, 53—58 (1949) [Spanisch].

Zwei Beispiele von topologischen (aber nicht metrischen) Räumen, für welche Urysohns und Mengers Definition verschiedene Dimensionszahlen ergeben: 1. ein Raum, der den 3 Axiomen von Kuratowski, 2. ein Raum, der den 4 Hausdorffschen Axiomen genügt. *Aumann (Würzburg).*

Šanin, N. A.: Über Produkte von topologischen Räumen. Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov 24 (1948) [Russisch].

Gul', I. M.: Eine topologische Inzidenzformel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 56, 895—898 (1947) [Russisch].

Verallgemeinerung der Lefschetz'schen Fixpunktformel [vgl. S. Lefschetz, Trans. Amer. math. Soc. 28, 1—49 (1926)]. Verf. betrachtet solche mehrdeutige stetige Abbildungen einer geschlossenen, orientierbaren,  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M^n$  in sich, deren Bild im Produktraum  $M^n \times M^n$  ein  $(n + p)$ -dimensionaler Zyklus ist, und bestimmt die Homologiekategorie des  $p$ -dimensionalen Fixzyklus, die hier an Stelle der algebraischen Fixpunktanzahl tritt. — In Formel (2) muß es  $(q - \mu)$  statt  $(q - m)$  heißen. Pannwitz (Berlin).

Vaccaro, Michelangelo: Sopra una generalizzazione del processo di dualizzazione di Poincaré per un complesso topologico. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 107—113 (1948).

Soit  $K$  un complexe simplicial de dimension  $r$  dont les sommets sont affectés d'un indice  $i$  variant de 0 à  $r$ ; l'A. impose à cette numérotation 3 conditions—conditions précisément vérifiées dans le cas classique de la subdivision barycentrique d'une variété. On peut alors définir une suite de complexes  $K^j$  ( $j$  variant de 0 à  $r$ ) de la façon suivante: soient  $P^h, P^k$  deux sommets d'un même simplexe de  $K$ , avec  $h \leq j \leq k$ . L'ensemble des simplexes de  $K$  dépendants de  $P^h, P^k$  qui ne contiennent aucun sommet d'indice compris entre  $h$  et  $k$  constitue un élément de  $K^j$ ; si le complexe  $K$  est „homogène“ (c'est-à-dire, si ses cellules fondamentales sont toutes de la dimension maximum  $r$ ), il en est de même des complexes  $K^j$ ; dans le cas classique où  $K$  est une variété, le complexe  $K^0$  est le dual du complexe  $K$ , et  $K^r$  coïncide avec  $K$ . L'A. ne donne aucune application de cette généralisation de la dualité, dont il est ainsi malaisé d'estimer l'intérêt. Thom (Pfaffenhofen).

Vaccaro, Michelangelo: Automorfismi e struttura topologica di un certo complesso regolare. Comment. math. Helvetici 23, 18—25 (1949).

Es handelt sich hier um simpliziale Komplexe besonderer Art und deren Automorphismen. Gegeben ist ein endlicher Eckpunktbereich  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Es werden alle  $(k - 1)$ -dimensionalen Simplexe gebildet, die man erhält, wenn man aus den Eckpunktfolgen  $x_0, x_{0+1}, \dots, x_{0+k}$  ( $0 = 1, 2, \dots, n; x_{n+i} = x_i; k < n/2$ ) einen Eckpunkt  $x_{0+i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ) streicht. Die Vereinigung dieser Simplexe ist homöomorph dem topologischen Produkt einer  $(k - 2)$ -dimensionalen Sphäre mit einer Kreislinie, wenn  $k$  ungerade oder  $k$  und  $n$  beide gerade sind; sonst erhält man eine nichtorientierbare Mannigfaltigkeit, in ihrer Bildung entsprechend dem Kleinschen Schlauch im zweidimensionalen Fall. Künneth (Erlangen).

Burger, E.: Über Schnittzahlen von Homotopieketten. Math. Z. 52, 217—255 (1949).

Die Definition der Paare Abelscher Gruppen nach Pontrjagin wird verfeinert zur Definition von Paaren Abelscher Gruppen  $G, H$  mit Operatoren, deren Operatorenbereiche die Hauptordnung (die Gesamtheit der ganzen Zahlen) eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  bilden. Das Produkt  $g \cdot h$  von Elementen aus  $G$  bzw.  $H$  soll dabei außer dem distributiven Gesetz der Bedingung  $(x_1 g) \cdot (x_2 h) = x_1 \cdot (g \cdot h) \cdot x$  genügen, wo  $x_1, x_2$  zu  $K$  gehören und  $x$  konjugiert imaginär zu  $x$  ist. Die Forderung, daß zu jedem  $g$  ein  $h$  und zu jedem  $h$  ein  $g$  mit  $g \cdot h \neq 0$  existiert, wird für den Fall, daß  $g \cdot h$  eine Zahl aus  $K$  ist, folgendermaßen verschärft:  $G$  und  $H$  sind dann vom Modultypus; es gibt daher zu jedem  $g$  ein Nennerideal  $1/n$ , das durch die gebrochenen algebraischen Zahlen  $x$ , für die  $xg$  ein Element aus  $G$  liefert, bestimmt ist; für jede Zahl  $t$  aus  $1/n$  soll dann die Gleichung  $g \cdot h = t$  eine Lösung in  $H$  besitzen. Falls  $g \cdot h$  eine Restklasse modulo 1 ist, tritt keine neue Bedingung hinzu. — Auf der Steinitz'schen Theorie der Matrizen mit Elementen aus  $K$  fußend, zeigt Verf.: sind  $G, H$  und  $G', H'$  zwei Gruppenpaare und ist  $G$  zu  $G'$  isomorph, so ist auch  $H$



zu  $H'$  und das Gruppenpaar  $G, H$  zu dem Paar  $G', H'$  isomorph. Der Beweis erfolgt für die beiden Fälle, daß  $g \cdot h$  eine Zahl oder eine Restklasse ist, gesondert. Wenn  $G$  und  $H$  miteinander identisch sind, wird dem Produkt  $g_1 \cdot g_2 = x$  die Bedingung  $g_1 \cdot g_2 = \overline{g_2} \cdot g_1$  oder  $= -\overline{g_2} \cdot g_1$  auferlegt. Dem Produkt ist dann eine Hermiteische Form zugeordnet, und der Äquivalenz der Produkte entspricht eine Äquivalenz dieser Formen. Auch wenn  $g_1 \cdot g_2$  eine Restklasse modulo 1 ist, ist das Produkt nicht durch die Struktur von  $G$  bestimmt. — Die verallgemeinerten Gruppenpaare lassen sich zur Untersuchung der Schnitt- und Verschlingungszahlen der Homotopieketten von Mannigfaltigkeiten (wie die gewöhnlichen Gruppenpaare zu der der Homologieketten) verwenden. Daß die Schnittzahlen den verfeinerten Axiomen genügen, wird mit Hilfe der Heekeschen idealen Zahlen gezeigt. Neue topologische Invarianten ergeben sich dem obigen Satz zufolge nur bei Gruppen, die zu sich selbst dual sind. Die Linsenräume der Dimension 5 sind hierfür ein bemerkenswertes Beispiel.

K. Reidemeister (Princeton, N. J.).

Wang, Hsien-Chung: The homology groups of the fibre bundles over a sphere. Duke math. J. 16, 33—38 (1949).

L'A. détermine les groupes d'homologie d'un espace fibré compact  $X$  de base  $S^n$ , connaissant l'homologie de la fibre  $F$  (qui est supposée être un polyèdre). On fait choix sur  $S^n$  d'un point fixe  $p$ ; le complémentaire  $S^n - p$  est alors une  $n$ -boule ouverte; soit  $F_0$  la fibre au-dessus de  $p$ ;  $F_0$  est un sous-espace compact de l'espace  $X$  et l'on peut écrire la suite exacte:

$$\rightarrow H^{r+1}(X, F) \rightarrow H^r(F_0) \rightarrow H^r(X) \rightarrow H^r(X, F_0) \rightarrow$$

où les groupes  $H^{r+1}(X, F_0)$  sont les groupes de Lefschetz  $\Gamma^{r+1}$  qui ne dépendent que du complémentaire ouvert  $X - F_0$ ; or  $X - F_0$  est isomorphe au produit  $F \times R^n$  et un lemme très simple établit alors l'isomorphisme  $\Gamma^r(X - F) \simeq \Gamma^{r-n}(F)$ . En utilisant le fait que  $\Gamma^{r-n}(F) = 0$  pour  $r < n$ , et en faisant des hypothèses sur  $H^k(F)$ , la suite exacte donne des isomorphismes qui permettent à l'A. d'énoncer des résultats assez généraux; par exemple: si  $F$  est une pseudovariété orientable de dimension  $n-1$ , on a (en homologie entière)  $H^r(X) \simeq H^r(F \times S^n)$  sauf peut-être pour les valeurs  $r = n, n-1$  pour lesquelles on peut avoir:  $H^n(X) = 0, H^{n-1}(X) = I_m$  (groupe cyclique d'ordre  $m$ ). L'A. donne en ce cas une interprétation de cet entier  $m$ . Il est à noter que cette méthode, si elle détermine de façon très satisfaisante la structure additive de l'anneau de cohomologie de  $X$ , n'apporte par contre aucun renseignement sur sa structure multiplicative.

Thom (Pfaffenhofen).

Ehresman, Charles: Sur les variétés plongées dans une variété différentiable. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1879—1880 (1948).

Soit  $E(B, F, G, H)$  un espace fibré,  $f$  une application de  $A$  dans  $B$  et  $E_f$  l'espace fibré induit par  $f$ . L'A. énonce un théorème d'homotopie duquel résulte que la structure de l'espace fibré  $E_f$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ . Ensuite suivent des applications de ce théorème aux sections d'un champ [en particulier si  $(V_{n-p}; g)$  est une section d'un champ  $\Phi_{n-p}$  défini sur  $V_n$ , et si  $g$  est homotope à zéro, alors  $V_{n-p}$  est parallélisable] et à la variété  $V'_n$  des éléments de contact de dimension  $p$  de la variété  $V_n$ . Dans cette dernière partie est énoncé un théorème que l'A. rapproche du théorème de Whitney-Steenrod sur la classification des espaces fibrés à groupe structural  $\Omega p$ . D'autres remarques sont faites aux applications de rang  $p$  d'une variété  $V_p$  dans une variété  $V_n$ .

Reeb (Saverne).

Tutte, W. T.: On the imbedding of linear graphs in surfaces. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 474—483 (1949).

Die Vierfärbung einer Karte auf der Sphäre läßt sich nach Tait in bekannter Weise auf die Dreifärbung des Kantensystems der Karte zurückführen, insofern das letztere ein regulärer Graph dritten Grades ist. Verf. gibt eine weitgehende Verall-

gemeinerung dieses Zusammenhanges zwischen der Taitschen Färbung des Graphen und der Vierfärbung der entsprechenden Karte. Er konstruiert sämtliche orientierbare Flächen, auf denen die entsprechende Karte eines gegebenen zusammenhängenden regulären Graphen dritten Grades mit Dreifärbung eine Vierfärbung gestattet. Für den Fall eines regulären paaren Graphen dritten Grades (d. h. eines solchen mit nur Kreisen von gerader Kantenanzahl) zeigt Verf. noch, daß ein solcher Graph immer in eine passende Fläche derart eingebettet werden kann, daß die entsprechende Karte eine Dreifärbung gestattet. *T. Szele (Debrecen).*

## Klassische theoretische Physik.

### Mechanik:

**Grioli, Giuseppe:** Questioni di stabilità riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fisic. mat., III. S. 1, 43—74 (1949).

Verf. zeigt, daß die regulären Präcessionen in den asymmetrischen, schweren Körpern, die er früher (dies. Zbl. 31, 38) untersucht hat, im allgemeinen instabil sind. Sie können als stabil angesehen werden, wenn die anfängliche Störung weder die gesamte Energie noch das Moment der Bewegungsgröße bezüglich der Vertikalen ändert. *Graffi (Bologna).*

**Donder, Théophile De et Frans-H. van den Dungen:** Sur le mouvement relatif des corps solides. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 221—223 (1949).

Verff. studieren zunächst die Koordinatenrelationen  $X^a = H_b^a \xi^b + X_G^a$  ( $a, b = 1, 2, 3$ ) zwischen den Achsen eines Trägheitssystems  $O$ ,  $X^a$  und denen eines festen Körpers  $G$ ,  $\xi^a$ , sodann die aus dem Verschwinden der Variationsableitungen  $\delta \mathcal{L} / \delta X_G^a = 0$ ,  $\delta \mathcal{L} / \delta H_b^a = 0$  hervorgehenden Bewegungsgesetze (mit  $\mathcal{L}$  als geeignet definierter Lagrange-Funktion) und schließlich die Bourschen Gleichungen des Problems mit Verwendung einer neuen Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}_n$ , in welche an Stelle der absoluten eine relativ definierte kinetische Energie eingeht. *M. Pinl.*

**Vălcovici, Victor:** Sur les équations du mouvement d'un solide de masse variable. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 52—53 (1949).

Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der fortlaufend Masse aufnimmt oder abgibt. *Hamel (Landshut).*

**Pailloux, Henri:** Sur les petits mouvements verticaux d'un fil pesant. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 808—810 (1949).

Im Anschluß an seine früheren Arbeiten [C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1208—1210 (1948) und dies. Zbl. 30, 227] untersucht Verf. hier kleine Schwingungen des schweren Idealfadens in einer Vertikalebene. Unter Einführung einer Hilfsfunktion  $\varphi(u, v)$ , durch die sich die drei Abhängigen ausdrücken lassen, findet er für diese eine lineare partielle Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer willkürlichen Funktion (eigentlich ist das Problem von der vierten Ordnung), die sich im Falle scharfer Spannung zu

$$\varphi(u, v) = F(v - u) + G(u + v) + \theta(v) + u \psi(v)$$

mit vier willkürlichen Funktionen integrieren läßt.  $u$  ist der variable Parameter,  $v$  der Zeit proportional. Kurzer Hinweis auf die Bestimmung der Eigenschwingungen, wenn ein Ende festgehalten, das andere an einen Pfahl geknüpft ist, der gedämpfte Schwingungen ausführen kann. *Hamel (Landshut).*

**Gregory, C. C. L.:** Theory of a loop revolving in air, with observations on the skin-friction. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 30—39 (1949).

Wird ein Seil, von einer Maschine angetrieben, in sich selbst in Bewegung gesetzt, so kann es in der Luft eine feste Gestalt annehmen, wenn die Bewegung einen Luftwiderstand hervorruft, der tangential gerichtet und der Schwere propor-

tional ist. Die Geschwindigkeit des Seils wird als konstant angenommen. Die Gleichungen für Krümmung und Spannung können aufgestellt und integriert werden. Das Ergebnis wird diskutiert und mit der Erfahrung verglichen. *Hamel.*

**Butenin, N. V.:** Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen im nichtlinearen mechanischen System mit zwei Freiheitsgraden. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 337—348 (1949) [Russisch].

L'A. étudie un système à deux degrés de liberté,  $x$  et  $y$ , animé d'un mouvement dont les équations sont du type:

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - \chi_1 \frac{dy}{dt} - n_1^2 x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \chi_2 \frac{dx}{dt} - n_2^2 y = \mu g\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right) + Q \sin t$$

où  $\chi_1, \chi_2, n_1, n_2, Q$  sont des constantes,  $\mu$  un paramètre petit,  $f$  et  $g$  des fonctions non linéaires de leurs arguments. La présence du terme  $Q \sin t$  au second membre de (1) constitue l'originalité du problème; l'A. se propose d'étudier son influence sur le mouvement du système, et, plus particulièrement, sur la stabilité de celui-ci. — Pour  $\mu = 0$ , la solution de (1) est banale. Des travaux récents, dont l'A. donne la bibliographie, fournissent des indications sur l'allure de la solution pour  $\mu \neq 0$ ; les constantes de la solution pour  $\mu = 0$  deviennent alors des fonctions du temps dont les dérivées d'ordre  $n$  par rapport à  $t$  sont de l'ordre de  $\mu^n$ . L'A. utilise ces propriétés pour former une solution approchée de (1). Puis il applique ces généralités au problème des vibrations forcées d'un monorail doté d'un stabilisateur gyroscopique à asservissement. — La discussion des différentes circonstances du mouvement paraît très complète; en voici les conclusions, d'après l'A. En gros, le paramètre  $Q$  joue un rôle essentiel: le système, rendu stable grâce au dispositif d'asservissement, le demeure tout que  $Q$  est assez petit; le système devient instable dès que  $Q$  atteint une valeur critique. *J. Kravtchenko (Grenoble).*

**Rubbert, Friedrich Karl:** Erzwungene Pendelschwingungen endlicher Amplitude. Z. Physik 127, 72—84 (1949).

Dieses sogenannte „Duffingsche Problem“ löst Verf. nach der Methode von Poincaré durch Entwicklung nach einem Parameter  $\alpha$ , dem Maximalwert des Ausschlages. Die Berechnung wird bis zu Gliedern dritter Ordnung in  $\alpha$  durchgeführt, wobei sich schon die Beobachtungen Duffings ergeben. Ref. hat ein Bedenken. In der entscheidenden Differentialgleichung (9) kommt ein Glied mit  $\cos \mu \tau$  vor, wo  $\mu$  von  $\alpha$  abhängt. Verf. behandelt aber offenbar  $\mu$  als eine Konstante. Die Sache wird noch bedenklicher, da nach Gleichung (18) ein als konstant behandelter Parameter  $\lambda$  Funktion von  $\mu$ , also auch von  $\alpha$  wird. Eine leicht mögliche Verbesserung würde die Methode nicht berühren, wohl aber vielleicht das Ergebnis. *Hamel.*

**Haag, Jules:** Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 649—651 (1948).

Kurze Übersicht über die Ergebnisse des Verf., die er in den umfangreichen Arbeiten in den Ann. sci. École norm. sup., s. z. B. dies. Zbl. 33, 84, 218, erzielt hat.

*Hamel (Landshut).*

**Bucurius, H.:** Zur Fourier-Analyse der Lösungen des Zweikörperproblems. Astron. Nachrichten 275, 193—202 (1947).

So wie im Falle der Ellipse die Darstellung

$$\frac{a}{r} = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu}(\nu e) \cos \frac{2\pi \nu t}{T}$$

möglich ist, so beweist Verf., gestützt auf Untersuchungen von Pringsheim, die Möglichkeit von

$$\frac{|a|}{r} = i \int_0^{\infty} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu e) \cos \frac{\nu t}{|T|} d\nu$$



im Falle der Hyperbel. Für die auftretende Hankelsche Funktion mit imaginärem Index und imaginärem Argument gestattet die Sattelpunktmethode die Abschätzung bei großen  $\nu$  durch das Produkt aus einer Exponentialfunktion,  $\nu^{-1/2}$  und einer semikonvergenten Reihe. Auch der parabolische Fall läßt sich so behandeln. Besondere Sorgfalt verlangen die diesem benachbarten Fälle. Auch das Verschwinden der Flächenkonstante wird einbezogen. *Hamel* (Berlin).

**Pierucci, Mariano:** Una correzione relativistica della legge di Newton e la tendenza delle orbite planetarie alla circolarità e alla complanarità. *Atti Soc. Natur. Mat.*, Modena, VI. S. 78, 1—4 (1947).

In einer Folge von Arbeiten [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VI. S. 26, 209—215 (1937), 27, 609—614, 28, 117—123 (1938), 29, 649—655 (1939); *Atti. Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VII. S. 1, 697—704, 2, 158 bis 165 (1940); *dies. Zbl.* 18, 181, 20, 174] hat Armellini folgendes bewiesen: Man gebe dem Newtonschen Anziehungsgesetz durch ein Zusatzglied die Form:

$$F = -f \frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right),$$

wo  $\varepsilon$  eine sehr kleine Konstante von der Dimension einer reziproken Geschwindigkeit sei. Dann ergibt sich im Zweikörperproblem für  $U = 1/r$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} + \varepsilon \frac{C}{p} \frac{dU}{d\theta} + U = \frac{1}{p},$$

wo  $C$  die Flächenkonstante,  $p = C^2/Mf$  und  $\theta$  der Positionswinkel des Planeten ist. In diesem Falle läßt sich u. a. zeigen, daß die Planetenbahnen die Tendenz haben, mit der Zeit kreisförmig und komplanar zu werden. — Verf. zeigt nun, daß aus dem Massenansatz der speziellen Relativitätstheorie (Masse = Funktion der Geschwindigkeit) die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} + \varepsilon \frac{C}{p} \frac{dU}{d\theta} + U = \frac{1}{p} \quad \left( \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{v_r}{c^2} \right)$$

folgt, die sich von der Armellinischen nur durch das erste Glied unterscheidet, sowie dadurch, daß hier  $\varepsilon$  nicht konstant ist ( $v_r$  bedeutet die Radialkomponente der Planetengeschwindigkeit,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit). Für nicht zu große Exzentrizitäten sind aber die beiden Formeln nahezu identisch. Hieraus zieht Verf. den Schluß, daß die kosmogonischen Folgerungen Armellinis für die Planeten des Sonnensystems gelten und somit die Kleinheit der Exzentrizitäten und Neigungen erklärt werde. Für die Kometen gilt diese Folgerung wegen der bedeutenden Unterschiede der beiden Gleichungen nicht. *K. Stumpff* (Vogelsang üb. Seesen/Harz).

**Belorizky, David:** Sur l'universalité de la loi de Newton. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 227, 715—717 (1948).

Weiß man, daß die Bahn des Begleiters des Hauptsterns eines Doppelsterns eine Ellipse ist, in deren Innerem der Hauptstern steht, und nimmt man eine Zentralbewegung an, so wird gewöhnlich auf die Gültigkeit des Newtonschen Anziehungsgesetzes geschlossen. Doch sei das nur richtig, wenn noch irgendeine Zusatzannahme gemacht wird, was gewöhnlich stillschweigend geschehe. Verf. zeigt, daß aber streng auf die Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes geschlossen werden kann, wenn man die beobachtete Bahn als Projektion einer geeignet angenommenen Bahn im Raume auffaßt. *Hamel* (Landshut).

## Elastizität. Plastizität:

• Timoshenko, S.: Résistance des matériaux. Deuxième partie: Théorie développée et problèmes. Traduit de l'anglais sur la deuxième édition par Ch. Laffitte. Paris: Librairie Polytechnique Ch. Béranger 1949. XVI, 464 p. 2800 francs.

Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie. II. Z. angew. Math. Mech. 29, 142—146 (1949).

Im Anschluß an die erste Arbeit (dies. Zbl. 33, 29) werden die Größen bestimmt, die die Formänderung der Schale, insbesondere der Schalenmittelfläche kennzeichnen (7). Zunächst wird der Dehnungstensor aufgestellt, der gemäß dem Hooke-schen Gesetz in linearem Zusammenhang mit dem Spannungstensor steht; dessen Komponenten mit dem Index 3 (Koordinate  $w$ ) werden vernachlässigt, da die Querkraftschubspannungen und die Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche sehr klein gegenüber den Längsspannungen und den Biegespannungen sind. Alle in den Spannungs-Dehnungsgleichungen auftretenden Größen werden auf die Verschiebungen der Schalenmittelfläche und deren (kovariante) Flächenableitungen zurückgeführt. Die entwickelten Gleichungen reichen zusammen mit den anschließend behandelten Randbedingungen (8) zur Bestimmung der Verschiebungskomponenten aus. Erste Randwertaufgabe: die Verschiebungen des Schalenrandes und seine Drehung um die Tangente der Randkurve sind vorgeschrieben. Zweite Randwertaufgabe: die resultierenden Kräfte und Momente sind vorgeschrieben, welche den längs des Randes wirkenden Spannungen entsprechen. In beiden Fällen sind, z. T. nach geeigneter Umformung, insgesamt 4 Größen bei Aufstellung der Randbedingungen zu berücksichtigen; dies gilt auch für die gemischte Randwertaufgabe. *Reutter* (Karlsruhe).

Beghin, Henri: Sur l'équilibre d'un solide dans un milieu élastique. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 573—574 (1948).

Von M. F. Ferrandon wurde (dies. Zbl. 30, 325) folgendes bewiesen: in einem unendlich ausgedehnten, homogen-isotropen, elastischen Kontinuum befinde sich ein starrer Körper  $K$ . Das Medium wird als im natürlichen (d. h. spannungslosen) Zustand vorausgesetzt und dem eingeschlossenen Körper  $K$  eine infinitesimale Verrückung (displacement) erteilt. Entlang seiner Begrenzungsfläche finde lückenloses Gleiten statt, die Verrückungen des Kontinuums sollen im Unendlichen verschwinden. Dann bietet das Kontinuum den Verrückungen des starren Körpers keinen Widerstand dar. — Dieser Satz, von Ferrandon analytisch hergeleitet (Neumannsche äußere Randwertaufgabe), wird vom Verf. durch rein mechanische Überlegungen bewiesen und damit der Unterschied zwischen Verrückungen eines Körpers in einer Flüssigkeit und solchen in einem elastischen Medium unterstrichen. *Hardtwig*.

Tranter, C. J.: The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 125—130 (1948).

Untersucht wird die Spannungsverteilung in einem unendlich ausgedehnten Keil unter sehr allgemeinen Voraussetzungen für die auf die Keilflächen einwirkenden Kräfte. Ausgehend von der Differentialgleichung für die Spannungsfunktion  $\Phi$  sowie den 4 Randbedingungen wird für  $\Phi$  eine neue Funktion  $\Phi$ , die „Mellintransformierte“, vermöge  $\Phi = \int_0^\infty \Phi r^{p-1} dr$  eingeführt ( $r$  = Radiusvektor zu dem in der Schneide des Keils liegenden Ursprung). Statt der für  $\Phi$  zu behandelnden Differentialgleichung ergibt sich jetzt eine neue für  $\Phi$ , die jedoch den Vorteil hat, eine Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu sein (die ungeraden Ableitungen fallen zudem heraus). Das Problem wird dadurch elementar lösbar. Der Sonderfall, daß die Belastung des Keils sich auf einen endlich ausgedehnten Bereich um die Schneide herum beschränkt, führt auf Integrale mit unendlichen Grenzen, die aber unter gewissen Bedingungen auswertbar werden. *Hardtwig* (München).

Mitra, D. N.: On flexure functions of a semi-circular cylinder. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 125—128 (1949).

In einer früheren Arbeit hat S. Ghosh (dies. Zbl. 29, 83) gezeigt, wie das Problem

der reinen Biegung eines elastischen Zylinders auf die Ermittlung von vier Integralen reduziert werden kann, wo unter dem Integralzeichen eine Funktion  $\omega(\zeta)$  auftritt, die den Querschnitt des Zylinders in der  $z$ -Ebene auf den Einheitskreis in der  $\zeta$ -Ebene konform abbildet, wenn der Ursprung des Koordinatensystems in der  $z$ -Ebene nach dem Schwerpunkt des Querschnitts verlegt wird. Verf. hat in einer früheren Arbeit [Bull. Calcutta math. Soc. 40, 81 (1948)] die entsprechende Abbildungsfunktion für drei verschiedene Querschnittsformen ermittelt und erweitert in seiner letzten Note die Lösung auf den Fall eines halbkreisförmigen Querschnitts, wobei die Abbildungsfunktion lautet:

$$\omega(\zeta) = [(1 + i\zeta) - \sqrt{2(1 - \zeta^2)^{1/2}}]/(i + \zeta),$$

wenn in der  $z$ -Ebene der Kreismittelpunkt nach dem Ursprung verlegt wird (I. S. Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity, New York 1946, p. 181).

Gran Olsson (Trondheim).

Mitra, D. N.: On the flexure problem of a limaçon and some other boundaries. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 153—158 (1949).

Nach dem Verfahren von Muschelišvili und Gosh wird die Verteilung der Querkraftschubspannungen in einem Stabquerschnitt untersucht, dessen Form ellipsenähnlich ist; im ersten Falle handelt es sich um eine Randkurve, welche in Polarkoordinaten der Gleichung  $r = b - 2a \cos \varphi$  entspricht, im zweiten Falle um eine am Einheitskreis gespiegelte Ellipse. Der erste Fall wurde bereits durch Morris behandelt; Verf. gelangt hier zu anderen Ergebnissen und führt die Abweichungen auf Konvergenzeigenschaften der auftretenden Reihenentwicklungen zurück.

H. Neuber (Dresden).

Mitra, D. N.: Torsion and flexure of an isotropic elastic cylinder whose cross-section is a semi-cardioid. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 28—40 (1949).

Unter Verwendung der Methoden von Muschelišvili und Gosh wird die Verteilung der Querkraft- und Torsionsschubspannungen in einem prismatischen Stab ermittelt, dessen Querschnitt eine Halb-Kardioide darstellt. Nach Aufstellung der Abbildungsfunktion, welche den Stabquerschnitt auf einen Halbkreis abbildet, werden die zu berechnenden Integrale im Komplexen bestimmt. H. Neuber.

Ruchadze, A. K.: Über die Deformation natürlich verdrehter Stäbe. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 533—542 (1947) [Russisch].

Schrifttum über Dehnung, Biegung und Schwingung tordierter Stäbe. Mittelpunkt des fest gehaltenen Querschnittes als 0-Punkt und Hauptträgheitsachsen als  $x$ - und  $y$ -Achse gewählt. Torsionswinkel  $= k z$ . Koordinaten  $x - k y z = \xi$ ,  $y + k x z = \eta$ . Im Mittelpunkt des Endquerschnittes  $z = l$  greife in der  $\xi$ -Richtung die Kraft  $W$  an.  $k^2$  wird vernachlässigt. Mit der Abkürzung  $v = W/E I_\eta$  sind die Verschiebungskomponenten

$$u = -\tau \eta z + v \left\{ \frac{\sigma}{2} (l - z) (\xi^2 - \eta^2) + \frac{l}{2} z^2 - \frac{z^3}{6} \right\} + k u_1, \quad v = \tau \xi z + \sigma v \{ l - z \} \xi \eta + k v_1, \\ w = \tau \varphi \{ \xi, \eta \} - v \left\{ \chi(\xi, \eta) + \xi \eta^2 + \xi \left( l z - \frac{z^2}{2} \right) \right\} + k w_1.$$

Abkürzungen  $\xi \varphi_\eta - \eta \varphi_\xi = H$ ,  $\xi \chi_\eta - \eta \chi_\xi = L$ . Richtungsos der Normalen des Querschnittsrandes mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet. Die von den Verschiebungskomponenten  $u_1$ ,  $v_1$  und  $w_1$  verursachten Spannungskomponenten

$$\sigma_z = \lambda \{ -\tau H + v L + 2 \tau z^2 \} + \{ \lambda + 2 \mu \} v \eta \left\{ 2 \xi^2 - \eta^2 - \frac{z^2}{2} \right\} - 2 E v \eta z \{ l - z \} + 2 a_0 f \\ + 2 b_0 \psi + 2 \omega + a_0 \left\{ 1 + \frac{\sigma}{\sigma} \xi^2 \eta - \frac{2}{3} \eta^3 + \eta z^2 \right\} + \sigma \Delta \Phi - p E \eta \{ l - z \} + A \xi + B \eta + C \\ \tau_{yz} = \mu \left\{ -\sigma l v (\xi^2 - \eta^2) + 2 \tau \eta z - v \left( l z^2 + \eta^2 z - \frac{z^3}{2} \right) \right\} + E v \{ \xi^2 - \eta^2 \} z \\ + z \left\{ a_0 f_\eta + b_0 \psi_\eta + \omega_\eta + a_0 \left( 1 + \frac{\sigma}{\sigma} \xi^2 - \eta^2 \right) + 2 b_0 \xi \right\} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + p \left\{ \chi_\eta + \xi^2 - \frac{\sigma}{2} (\xi^2 - \eta^2) \right\}$$



usw. erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen, die Verträglichkeitsbedingungen und die Bedingung, daß an der Mantelfläche keine Spannung angreift, wenn  $f$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  und  $\Psi$  harmonisch,  $\Phi$  biharmonisch und am Querschnittsrande

$$\frac{d\omega}{dn} = \mu \nu \left\{ -(2 - 3\sigma) \xi \eta \alpha - \left( \frac{8 + 5\sigma}{2} \xi^2 - \frac{6 + \sigma}{2} \eta^2 \right) \beta \right\},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = - \int_0^s \left\{ a_0 \left( 1 + \sigma \xi^2 \eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \alpha + b_0 (\xi^2 - \eta^2) \beta + (a_0 f + b_0 \psi + \omega) \alpha + Y \right\} ds,$$

$$Y = \mu \tau \eta \{ \varphi_\eta + \xi \} \alpha - \mu \tau \{ \eta \varphi_\xi + \xi^2 \} \beta + \mu \nu \eta \{ \chi_\xi + (2 + \sigma) \xi^2 \} \beta \\ - \mu \nu \eta \{ \chi_\eta + (2 + \sigma) \xi \eta \} \alpha \quad \text{usw.}$$

Die Eindeutigkeit der Funktionen  $\Phi$ ,  $\partial \Phi / \partial \xi$  und  $\partial \Phi / \partial \eta$  ergibt

$$a_0 = \left\{ \frac{1}{I_\xi} - \frac{1}{I_\eta} \right\} W, \quad a_0 \oint \left\{ f(-\eta \alpha + \xi \beta) + \xi \eta \left( \frac{\sigma}{1 + \sigma} \xi^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) \beta \right\} ds \\ + b_0 \oint \{ \psi + \xi^2 - \eta^2 \} \{ -\eta \alpha + \xi \beta \} ds = \oint \{ \omega(-\eta \alpha + \xi \beta) + \eta X - \xi Y \} ds.$$

Querschnittsfläche mit  $F$  bezeichnet. Die Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $p$  und  $\tau$  werden aus  $\iint \tau_{zy} dF = 0$ ,  $\iint \sigma_z dF = 0$ ,  $\iint y \sigma_z dF = 0$ ,  $\iint x \sigma_z dF = 0$ ,  $\iint \{ y \tau_{zx} - x \tau_{zy} \} dF = 0$  bestimmt. Anwendung auf den Querschnittsrand  $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ . *K. Ludwig.*

**Sengupta, A. M.:** Stresses in some aeolotropic and isotropic circular disks of varying thickness rotating about the central axis. *Bull. Calcutta math. Soc.* **41**, 129—139 (1949).

Sind in Zylinderkoordinaten die Elastizitätskonstanten unabhängig vom Achs-  
abstand  $r$  und invariant gegenüber einer Drehung um die Zylinderachse, wie auch  
gegenüber einer Translation in Richtung derselben, so verhält sich der Werkstoff  
zylindrisch-anisotrop. Verf. integriert für diesen Fall die Elastizitätsgleichungen  
einer dünnen rotierenden Kreisscheibe mit ebener, zur Drehachse senkrechter  
Mittelfläche, wobei die Scheibendicke dem Potenzgesetz  $h = h_0 r^{-\lambda}$  genügt, sowie  
für Scheibenprofile, die sich dem Gesetz  $h = h_0 r^p e^{-\lambda r^q}$  anpassen lassen. Hierbei  
sind  $h_0$  und  $\lambda$  frei wählbare Konstanten, während  $p$  und  $q$  mit den Elastizitätskon-  
stanten des Werkstoffes in Zusammenhang stehen. *H. Neuber (Dresden).*

**Sadowsky, M. A. and E. Sternberg:** Stress concentration around a triaxial  
ellipsoidal cavity. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 149—157 (1949).

Die Arbeit enthält die exakte Lösung folgender Aufgabe in geschlossener Form:  
Ermittlung der elastischen Spannungen infolge eines elliptischen Hohlraumes und  
einer konstanten Spannung in sehr großer Entfernung in einem unendlich ausgedehnten,  
isotropen Körper. Der Hohlraum soll frei von Oberflächenspannung und die  
Achsen des Ellipsoids parallel zu den Richtungen der Hauptspannungen im Unend-  
lichen sein. Es werden Potentiale der Verschiebungen eingeführt, die fünf voneinander  
unabhängige Lösungen enthalten, für die sämtliche Spannungskomponenten in  
elliptischen Koordinaten tabuliert werden. Diese Spannungen werden nun den  
ursprünglichen so überlagert, daß die Komponenten an der Oberfläche des Hohl-  
raums infolge des ursprünglich homogenen Spannungszustandes verschwinden. Die  
maßgebenden Spannungswerte für einachsige Zugspannung sind für verschiedene  
Werte der Formparameter des Ellipsoids graphisch dargestellt, wobei die Querdeh-  
nungszahl zu 0,3 angenommen wurde. Die maximalen Spannungen werden durch die  
Querdehnungszahl nur wenig beeinflusst. *Gran Olsson (Trondheim).*

**Willmore, T. J.:** The distribution of stress in the neighbourhood of a crack.  
*Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **2**, 53—63 (1949).

In der Note wird die Spannungsverteilung in der Umgebung eines ebenen Risses  
mit Hilfe komplexer Veränderlicher nach der Methode von Muschelišvili ermittelt  
[*Z. angew. Math. Mech.* **13**, 264—282 (1933); dies. Zbl. **7**, 209], wobei der Druck

längs des Risses veränderlich ist. Die Untersuchung wird auf Risse in aeolotropen Stoffen erweitert, die zwei Richtungen von elastischer Symmetrie besitzen, deren eine Richtung parallel zum Riß verläuft. Die Arbeit schließt mit einer Untersuchung über die Spannungsverteilung in der Umgebung von zwei kollinearen Rissen von gleicher Länge, und es werden Formeln abgeleitet, die die Gestalt des Risses und die zu den Rissen senkrechte, kritische Zuspansung angeben, die einen Bruch verursachen wird. Es wird weiter gezeigt, daß der Einfluß eines Risses auf den anderen sehr gering ist, wenn die Entfernung zwischen den Rissen die Länge eines Risses überschreitet. Der Fall zweier kollinear Risse wird mit Hilfe eines hydrodynamischen Gleichnisses gelöst, wobei bekannte komplexe Potentialfunktionen angewandt werden. Die Spannungsverteilung wird diskutiert und ihre Anwendung auf die Bruchtheorie von A. A. Griffith gegeben. Wie Verf. bemerkt, können die dargestellten Methoden auf das Problem des Eindringens in ein isotropes oder aeolotropes Material von ebener Begrenzung durch einen Stempel von beliebiger Gestalt oder durch einen Doppelstempel von ebenem Endquerschnitt angewandt werden.

*Gran Olsson* (Trondheim).

Hodge jr., P. G.: On torsion of plastic bars. J. appl. Mech., New York 16, 399—405 (1949).

Sengupta, A. M.: Note on a simple case of forced torsional oscillation of a circular cylinder. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 47—48 (1949).

Verf. weist auf eine einfache Lösung der Torsionsgleichung der Torsionsschwingungen des kreiszylindrischen Stabes hin, welche sich ohne Bezugnahme auf Zylinderfunktionen allein mit Hilfe trigonometrischer Funktionen darstellen läßt. Die Bedingungen der Lastfreiheit des Zylindermantels und der Einspannung des Anfangsquerschnittes, sowie der Einleitung von Schubspannungen am anderen Ende, welche proportional  $r \sin(\omega t)$  verlaufen ( $r$  ist Achsabstand), werden allerdings nicht in geschlossener Form, sondern mittels einer unendlichen Reihe befriedigt.

*H. Neuber* (Dresden).

Woinowsky-Krieger, S.: On vibrations of a two-bar elastic system with a small rise. J. appl. Mech., New York 16, 395—398 (1949).

Meteliyn, I. I.: Zur Frage des Schwankens eines Rades mit elastischer Achse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 449—452 (1948) [Russisch].

Hoppmann 2nd, W. H.: Impact of a mass on a column. J. appl. Mech., New York 16, 370—374 (1949).

### Hydrodynamik:

Angelitch, Tatomir: Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 211—220 u. serb. Zusammenfassg. 221—222 (1948).

Verf. ordnet dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v} = \{v_i\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) einer Strömung die Pfaffsche Form  $\Phi = \sum_{i=1}^3 v_i dx_i$  zu und betrachtet zunächst die Matrix  $||\partial v_j / \partial x_i||$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), die er den lokalen Pfaffschen Affinor der Strömung nennt. Dieser Affinor wird in der üblichen Weise in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil zerlegt und gedeutet. Die wichtigste Anwendung Pfaffscher Formen auf die Theorie der Strömungen beruht aber auf der Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen der Strömung aus der der Hamiltonschen Wirkungsgröße zugeordneten Pfaffschen Form zu gewinnen. Dies wird von Verf. ausführlich gezeigt, wobei er sich auf bekannte Ergebnisse älterer Untersuchungen von Bilimovitch und Whittaker stützen kann.

*M. Pini* (Dacca).

Allen, D. N. de G.: The formation of closed wakes in fluid motions. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 64—71 (1949).

Verf. untersucht stationäre ebene Potentialströmungen einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit im ersten Quadranten der Ebene  $z = x + i y$ . Längs der  $y$ -Achse als fester Wand aus dem Unendlichen kommend, werden sie in der Nähe des Nullpunktes in die  $+x$ -Richtung umgelenkt und verlaufen dann an der  $x$ -Achse als fester Wand wieder ins Unendliche. Bei der Richtungsänderung um  $\pi/2$  erfolgt der Übergang längs einer sich glatt an die Koordinatenachsen anschließenden freien Stromlinie. Die andere Begrenzung der Strömung wird durch eine einzige, sich beiderseits ins Unendliche erstreckende freie Stromlinie gebildet. Sind  $w = \Phi + i \Psi$  das komplexe Geschwindigkeitspotential und  $u, v$  die Komponenten der Geschwindigkeit, so erfolgt die Berechnung der freien Stromlinien in der üblichen Weise durch Betrachtung der konformen Abbildung der  $w$ -Ebene auf die  $(\log \zeta)$ -Ebene  $[\zeta = 1/(u - i v)]$ . Ergänzt man schließlich die im ersten Quadranten erhaltene Strömung durch die hierzu symmetrischen Strömungen in den anderen Quadranten, so erhält man um den Koordinatenursprung ein Totwasser, das von freien Stromlinien mit Spitzen begrenzt ist. Maruhn (Dresden).

Szegö, G.: The virtual mass of nearly spherical solids. Duke math. J. 16, 209—223 (1949).

Führt ein fester Körper in einer reibungslosen, inkompressiblen, rotationsfreien homogenen Flüssigkeit eine reine Translation aus (Geschwindigkeitsvektor  $hU$ ,  $h$  Einheitsvektor), so nennt man die durch die Gleichung  $T = \frac{1}{2} W U^2$  ( $T$  kinetische Energie der Flüssigkeit) definierte Größe  $W$  die virtuelle Masse (virtual mass) des Körpers. Sind  $h_1, h_2, h_3$  die Richtungskosinus von  $h$ , so kann  $W$  in der Gestalt  $W = \sum_{i,k=1,2,3} W_{ik} h_i h_k$  geschrieben werden, wobei die  $W_{ik}$  nur von dem Körper und der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Die symmetrische Matrix  $(W_{ik})$  hat drei vom Koordinatensystem unabhängige Invarianten  $I_1, I_2, I_3$ ; insbesondere ist  $I_1 = W_{11} + W_{22} + W_{33}$ , und man erklärt die mittlere virtuelle Masse durch  $W_m = \frac{1}{3} I_1$ . Verf. vergleicht nun  $W_m$  mit der mittleren virtuellen Masse  $W_m^0$  der Kugel gleichen Volumens und zeigt, daß  $W_m$  für die Kugel ein relatives Minimum hat. Hierzu wird bewiesen: Es sei  $r = 1 + f(\vartheta, \varphi) = 1 + \delta f^*(\vartheta, \varphi)$  die Gleichung einer nahezu kugelförmigen Fläche in den Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ , ferner  $\delta$  ein kleiner Parameter und  $f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi) (X_n \text{ Laplacesche Kugelfunktionen})$ . Vernachlässigt man die Glieder zweiter und höherer Ordnung in  $\delta$ , so gilt

$$\frac{W_m}{2\pi} = \frac{W_m^0}{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(n-1)(2n-1)}{2(2n+1)} \frac{1}{4\pi} \iint X_n^2 d\omega$$

( $d\omega$  das Flächenelement der Einheitskugel). — Es werden dann noch einige Bemerkungen zu den Größen  $I_1, I_2, I_3$  und zu dem analogen ebenen Fall gemacht.

Maruhn (Dresden).

Miche, Robert: Sur la réduction à un principe variationnel du mouvement non lent des fluides visqueux. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 28, 151—179 (1949).

Nach Helmholtz können die langsamen, stationären Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit durch ein Variationsproblem gewonnen werden, dessen Lagrangesche Funktion die Dissipationsfunktion ist. Nach Millikan ist das für endliche Bewegungen nicht möglich. Verf. zeigt, daß man das Ziel wohl erreichen kann, wenn man zu einer geeignet gewählten, von ihm erratenen Lagrangeschen Funktion die drei Ausdrücke, die vermöge der Bewegungsgleichungen verschwinden, mit Lagrangeschen Parametern hinzufügt. Diese Parameter sind bei der Variation konstant zu halten, obwohl sie sich hinterher als variabel erweisen. Aus den Bewegungsgleichungen ist der Druck eliminiert worden, die Lagrangesche Funktion ist die doppelte Dissipationsfunktion, vermehrt um  $\rho u^\alpha u_\alpha^*$ , wobei die  $u^\alpha$  die Geschwin-



digkeitskomponenten sind. Das Variationsproblem ist aber kein reguläres im Sinne von Hilbert. *Hamel* (Landshut).

**Goldstein, S.:** On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **1**, 43—69 (1948).

Für die unmittelbare Nähe stromauf vom Ablösungspunkt einer Laminarströmung werden Reihenentwicklungen des Geschwindigkeitsprofils bei kleinem und großem Wandabstand unter der Annahme des Fehlens exponentieller Glieder diskutiert, ohne daß bewiesen werden kann, ob eine asymptotische Lösung tatsächlich gewonnen wird. Auch bleibt offen, welches die allgemeinsten Beschränkungen der Druckverteilung sind, damit Strömungen mit überall verschwindender Wandschubspannung existieren. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst).

**Jones, C. W.:** On a solution of the laminar boundary-layer equation near a position of separation. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **1**, 385—407 (1948).

Im Anschluß an eine Arbeit von S. Goldstein (s. vorsteh. Referat) wird nachzuweisen versucht, daß auch in der Funktion  $f_6$  der Reihenentwicklung für das Geschwindigkeitsprofil nahe am Ablösungspunkt keine exponentiellen Glieder auftreten. Von den asymptotischen Entwicklungen von  $f_3, f_4, f_5$  bei großen Argumentwerten ausgehend, werden diese Funktionen numerisch zum Koordinatenursprung hin integriert, weil die Fehler dabei möglichst klein werden. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird die Hartreesche Rechnung verbessert und die „Außenlösung“ von von Kármán-Millikan durch einen zweiten Näherungsschritt verfeinert. *Pretsch*.

**Jaglom, A. M.:** Über das Beschleunigungsfeld in einer turbulenten Strömung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **67**, 795—798 (1949) [Russisch].

L'A se propose d'appliquer la théorie de la turbulence locale de M. Kolmogorov à la détermination de  $\sum_1^3 \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2$ . Posons:  $s_0 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right]^{-3/2}$ ; les expériences de Townsend [Proc. Cambridge philos. Soc. **44**, 560—565 (1948)] donnent:  $s_0 \approx -0,4$ . Soit  $\varepsilon$  l'énergie dissipée par unité de masse du fluide en unité de temps; l'hypothèse de similitude de la turbulence permet alors de justifier la relation:  $\sum_1^3 (\Delta v_i)^2 \approx 0,3 s_0 \nu^{-5/2} \varepsilon^{3/2}$  valable pour de grands nombres de Reynolds. — D'autre part, en utilisant divers résultats de M. Oboukhov, l'A. trouve:

$$\sum_1^3 \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 \approx -\frac{1,1 \varrho^2}{s_0} \nu^{-1/2} \varepsilon^{3/2}.$$

Sa méthode paraît à l'A. plus rapide que celle de W. Heisenberg. Ceci entraîne:

$$\sum_1^3 \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2 = \sum_1^3 \left[ \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \nu^2 (\Delta v_i)^2 \right] = 3 \nu^{-1/2} \varepsilon^{2/3}$$

formule que l'A. applique au calcul des accélérations, dues à la turbulence, dans la couche limite. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

**Heisenberg, Werner:** Bemerkungen zum Turbulenzproblem. *Z. Naturforsch.* **3a**, 434—437 (1948).

Verf. gibt einen kurzen Überblick über die von ihm an anderer Stelle [Z. Physik **124**, 628—657 (1948)] kürzlich veröffentlichte statistische Turbulenztheorie.

*H. Schlichting* (Braunschweig).

**Truesdell, Clifford:** Une formule pour le vecteur tourbillon d'un fluide visqueux élastique. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **227**, 821—823 (1948).

Aus einer allgemeinen Formel für den Turbulenzvektor in einer zähen elastischen Flüssigkeit werden die drei verschiedenen Mechanismen der Turbulenzentstehung im Innern einer Flüssigkeit abgeleitet. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst).

**Rudnev, Ju. V.:** Über einige Bewegungen eines Gases mit veränderlicher Entropie und voller Energie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 869—870 (1948) [Russisch].

Soient:  $\psi$ , la fonction de courant d'un écoulement plan, adiabatique d'un gaz parfait;  $\vartheta(\psi) = p/\rho^\gamma$  (fonction liée à l'entropie);  $v_0(\psi)$ , le module de la vitesse maxima du fluide. L'A. envisage l'écoulement tel que:  $v_0^2(\psi)/\vartheta(\psi) = \text{const}$ ; il se trouve qu'à chaque mouvement de cette espèce correspond un écoulement du type de Tchaplyguine:  $v_0(\psi^*) = \text{const}$ ;  $\vartheta(\psi^*) = \text{const}$ , admettant le même système de ligne de courant que le premier. La relation entre les deux fonctions de courant  $\psi^*$  et  $\psi$  est donnée par la formule:  $\psi^* = \int v_0(\psi) d\psi$ . J. Kravtchenko (Grenoble).

**Gutman, L. N.:** Über die laminare thermische Konvektion über einer stationären Wärmequelle. Priklad Mat. Mech., Moskva 13, 435—444 (1949) [Russisch].

L'A. envisage un écoulement permanent, à symétrie axiale autour de  $Oz$ , d'un fluide visqueux compressible dont il forme les équations en tenant compte du phénomène de convection, dû à la présence d'une source de chaleur ponctuelle. L'A. a en vue l'étude des courants de convection de l'air atmosphérique calme. Diverses hypothèses simplificatrices l'amènent à une solution approchée du problème: voici quelques propriétés de l'écoulement théorique ainsi obtenu. La composante verticale de la vitesse le long de l'axe  $Oz$  est indépendant de la cote  $z$ , mais est fonction de l'intensité de la source. Il existe une cote critique à partir de laquelle l'écoulement cesse d'être laminaire etc. — A la fin de son travail, l'A. étend son analyse au cas d'une source ponctuelle plongée dans un courant d'air ascendant de vitesse constante. J. Kravtchenko (Grenoble).

**Bugaenko, G. A.:** Zum Problem der strahlartigen Umströmung eines unendlichen Gitters durch ein Gas in annähernd S. A. Čaplyginschen Bedingungen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 449—456 (1949) [Russisch].

S. Tchaplyguine a fait connaître une forme remarquable des équations de l'écoulement plan, adiabatique, permanent d'un gaz parfait. Si les vitesses sont petites par rapport à celles du son, il se trouve que  $\omega = \theta + i\sigma$  ( $\theta$  étant l'angle du vecteur vitesse avec  $Ox$ ) peut être considérée, avec une bonne approximation, comme une fonction analytique du potentiel complexe  $f$ . L'A. applique cette remarque à l'étude de l'écoulement gazeux (avec sillage) à travers une persienne de largeur infinie, dont chaque élément serait un segment de droite. Une adaptation convenable de la méthode classique de Levi-Civita lui donne  $\omega = \omega(f)$ ; il détermine à partir de là toutes les caractéristiques du mouvement. J. Kravtchenko (Grenoble).

**Prim, R. C.:** On a family of rotational gas flows. Quart. appl. Math. 6, 319—325 (1948).

Verf. erweitert die von Prandtl und Meyer 1908 untersuchte stetige Verdünnungsströmung um eine konvexe Ecke auf allgemeinere Gasströmungen, die dann allerdings nicht mehr rotationsfrei sind. Die radialen und tangentialen Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich hierbei in einem Polarkoordinatensystem zu  $v_r = v_{\max} v_0 \cos [(\theta - \theta_0)/\lambda v_0]$  und  $v_\theta = v_{\max} \sin [(\theta - \theta_0)/\lambda v_0]$ , wobei  $v_{\max}(v_0)$  die Geschwindigkeit der Expansion ins Vakuum,  $v_0$  ein Parameter ( $|v_0| < 1$ ) und  $\lambda^2 = (\kappa + 1)/(\kappa - 1)$  ist. Als Sonderfall ist unter dieser Schar von Lösungen auch die Prandtl-Meyer-Strömung mit  $v_0^2 = 1/\lambda$  enthalten, die als einzige rotationsfrei ist. Die Verteilung des Druckes, der Dichte und der Rotation kann in geschlossener Form angegeben werden, ebenso wie auch die Gleichungen der Stromlinien und Isobaren angebar sind. Unter den vom Verf. bildlich dargestellten Strömungsformen ist auch die Strömung um eine unendlich dünne Platte enthalten, bei der also die Strömung um  $180^\circ$  umgelenkt wird. Physikalisch können solche Strömungen wohl nur dadurch verwirklicht werden, daß eine zunächst rotationsfreie Gasströmung eine gekrümmte Stoßfront durchläuft. Wuest (Göttingen).

**Ward, C. N.:** Supersonic flow past thin wings. II. Flow-reversal theorems. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 374—384 (1949).

Auf Grund der allgemeinen linearisierten Theorie der Überschallströmung hinter dünnen Flügeln, die in Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 136—152 (1949) entwickelt wurde, werden in Erweiterung früherer Sätze von von Kármán und Hayes die beiden folgenden Sätze bewiesen: I. Ein dünner Flügel mit symmetrischem Profil erfährt bei Nullauftrieb in Überschallströmung bei Strömungsumkehr denselben Betrag an Widerstand und dieselbe Seitenkraft. II. Für einen dünnen, nahezu ebenen Flügel in Überschallströmung, der einen solchen Grundriß hat, daß die Strömungen an den Unterschallkanten unabhängig verlaufen, und für den an der Hinterkante die Kutta-Joukowski-Bedingung erfüllt ist, bleibt die Steigung der Auftrieb-Anstellwinkel-Kurve ungeändert, falls die Abflußbedingung an der Hinterkante in der neuen Strömung erfüllt ist. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst),

**Carrière, Pierre:** Écoulements supersoniques infiniment voisins. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1632—1634 (1949).

Zu einer vorgegebenen stationären Überschallströmung werden benachbarte stationäre Strömungen gesucht, wobei die Abweichungen von der vorgegebenen Grundströmung nur linear berücksichtigt werden. Man erhält bei diesem vom Ref. entwickelten „halblinearen“ Verfahren [Luftf.-Forsch. 19, 148—152 (1942); dies. Zbl. 27, 175] lineare Differentialgleichungen, deren Charakteristiken durch die Grundströmung gegeben sind. Neben den bereits bekannten Anwendungen (Drehkörper unter kleinem Anstellwinkel, Übergang von einer konischen zu einer ogivalen Drehkörperspitze) weist Verf. noch auf folgende Probleme hin: Kegelströmung mit kleinen Änderungen der Mach-Zahl oder des Öffnungswinkels, kleine Änderungen der Körperkontur durch Berücksichtigung der Grenzschicht. *R. Sauer.*

**Thomas, T. Y.:** On conditions for steady plane flow with shock waves. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 91—98 (1949).

Es wird der folgende Satz der Gasdynamik bewiesen: Die Stoßlinie liegt in der Strömungsebene fest und die Strömung hinter der Stoßlinie ist stationär, wenn der Stoßwinkel  $\alpha$  in bezug auf die Machsche Zahl  $M$  der ungestörten Strömung nicht singulär ist. Dabei wird unter Singularität das Verschwinden einer gewissen in  $\alpha$  und  $M^2$  rationalen Funktion verstanden. *Pretsch* (Frankfurt/M.-Höchst).

**Bechert, Karl:** Theorie der Verbrennungsgeschwindigkeit in brennbaren Gemischen. Z. Naturforsch. 3a, 584—590 (1948).

Qualitative Wiedergabe und physikalische Diskussion der Ergebnisse der nachstehend besprochenen ausführlichen Arbeit. *H. Behrens* (Weil/Rh.).

**Bechert, Karl:** Zur Theorie der Verbrennungsgeschwindigkeit, mit einer Anwendung auf die Ozonverbrennung. Ann. Physik, VI. F. 4, 191—230 (1949).

Es wird zunächst auf der Grundlage der thermodynamisch-hydrodynamischen Theorie eine untere Grenze für die Detonationsgeschwindigkeit und eine obere Grenze für die Verbrennungsgeschwindigkeit abgeleitet. Für das Verhältnis beider Grenzggeschwindigkeiten ergibt sich ein Ausdruck, der nur das Verhältnis der Temperaturen und Molekulargewichte im Verbrannten und Unverbrannten enthält. Für die Verbrennungsgeschwindigkeit wird eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung abgeleitet. Die Diffusion geht nicht explizite in die Rechnung ein, sondern wird indirekt durch geeignete Wahl der Aktivierungsenergie des chemischen Bruttovorgangs unter Benutzung einer gemessenen Verbrennungsgeschwindigkeit berücksichtigt. Die Verbrennungsgeschwindigkeit tritt in der Differentialgleichung als Parameter auf, dessen Wert sich aus den Randbedingungen — im Verbrannten und Unverbrannten — eindeutig bestimmt. Für die Verbrennungsgeschwindigkeit wird eine Näherungsformel abgeleitet und zwar nach einem Verfahren, das allgemein bei Differentialgleichungen auf die Bestimmung von Parametern, deren Wert durch Randbedingungen festgelegt sei, anwendbar ist. — Das Verfahren setzt als Näherungslösung eine Funktion an, welche den Bedingungen und Eigenschaften der gesuchten Integralkurve möglichst weitgehend genügt. Der Parameter selbst wird dann durch



Einsetzen der Näherungsfunktion in die Differentialgleichung bestimmt. — Durch Dimensionsbetrachtungen wird gezeigt, daß auch die explizite Berücksichtigung der Diffusion die Form des gewonnenen Ausdrucks für die Verbrennungsgeschwindigkeit nicht ändert. Die Formel ist auch grundsätzlich nicht sehr verschieden von der älteren Gleichung von Nusselt, die jedoch den physikalisch unzulässigen Begriff einer Zündtemperatur enthält. Prüfung der neuen Formel für die Verbrennungsgeschwindigkeit von Ozon zeigt befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen.

*H. Behrens (Weil/Rh.).*

**Wuest, Walter:** Beitrag zur Entstehung von Wasserwellen durch Wind. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 239—252 (1949).

Die Entstehung von Wasserwellen durch Wind ist schon früher von Lord Kelvin nach der Theorie der reibungslosen Flüssigkeit behandelt worden und hatte als niedrigste Windgeschwindigkeit, bei der Instabilität auftritt, einen Betrag von 6,66 m/sec ergeben. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem von neuem mit Berücksichtigung der Zähigkeit behandelt. Dabei werden im Wasser und in der Luft laminare Grenzschichten berücksichtigt, und es wird deren Stabilität nach der Methode der kleinen Schwingungen untersucht, in gleicher Weise wie früher von W. Tollmien und H. Schlichting die laminare Grenzschicht an einer ebenen Wand. Die Wellenlänge der am stärksten angefachten Wellen hängt noch von der Grenzschichtdicke ab und wächst mit der Grenzschichtdicke an. Diese Wellenlängen liegen zwischen 2 und 4 cm, und die zu ihrer Anregung erforderliche kleinste Windgeschwindigkeit liegt bei etwa 0,7 m/sec. — Die beobachteten Werte weichen hiervon etwas ab, doch es ist zu beachten, daß bei den Messungen stets turbulente Grenzschichten vorgelegen haben.

*H. Schlichting (Braunschweig).*

**Havelock, T. H.:** The wave resistance of a cylinder started from rest. *Quart. J. Mech. appl. Math.*, Oxford **2**, 325—334 (1949).

Berechnung des Wellenwiderstandes auf einen beschleunigt in Bewegung gesetzten Kreiszylinder in einer gewissen Tiefe unter einer ruhenden Wasseroberfläche. Berechnung für drei Endgeschwindigkeiten und Darstellung der Oszillationen, mit denen sich der Widerstand dem Endzustand nähert.

*Hamel (Landshut).*

**Sokolovskij, V. V.:** Über die Gleichungen der nicht-linearen Filtration. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **65**, 617—620 (1949) [Russisch].

### Wärmelehre:

**Weinbaum, Sidney and H. L. Wheeler jr.:** Heat transfer in sweat-cooled porous metals. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 113—122 (1949).

Gli AA. studiano la propagazione del calore in un metallo poroso; con i pori attraversati da un fluido in moto. Considerano dapprima una sottile lastra a facce piane e parallele e suppongono i pori scanalature parallele al suo asse percorse da un fluido in moto nel verso opposto al gradiente della temperatura. Introdotte altre ipotesi semplificatrici dimostrano che, nello stato stazionario, la temperatura del metallo e del fluido soddisfano a equazioni differenziali a coefficienti costanti del terzo ordine le cui soluzioni sono completamente determinate, nota la temperatura del metallo sulle due facce della lastra e la temperatura di ingresso del fluido. Risulta perciò non lineare la legge di distribuzione della temperatura nel metallo, uguale però, in quasi tutta la lastra, a quella del fluido. Questi risultati vengono poi estesi alla propagazione del calore in un metallo poroso limitato da due cilindri coassiali, percorsi radialmente dal fluido; il problema è più complesso perchè si riconduce ad equazioni del terzo ordine lineari con coefficienti variabili, equazioni solubili mediante le funzioni ipergeometriche.

*Graffi (Bologna).*

**Goheen, Harry E.:** A method for determining certain critical masses. *J. Math. Physics*, Massachusetts **28**, 107—116 (1949).

L'equazione per la distribuzione della temperatura  $U$  in un mezzo omogeneo, dove si sviluppa calore per reazioni chimiche, viene scritta dall'A. nella seguente forma: (1)  $c \rho \partial U / \partial t = k \nabla^2 U + \lambda e^{-\varepsilon / R U}$  dove  $c, \rho, k$  sono rispettivamente il calore specifico la densità e la conduttività del mezzo,  $\lambda, \varepsilon, R$  altre costanti,  $t$  il tempo,  $\nabla^2$  l'operatore di Laplace. L'A. considera un mezzo indefinito, la temperatura iniziale uguale a  $U_0$  all'interno di una sfera di raggio  $r$ , a  $U_1$  al suo esterno,  $U_0$  e  $U_1$  pure costanti. Per interpretare alcuni fenomeni della combustione determina, in base alla (1) (però con considerazioni non del tutto persuasive dal punto di vista matematico), l'estremo inferiore dei valori di  $r$  per cui la temperatura del centro della sfera è sempre crescente. — Studia poi l'analogo problema quando la temperatura iniziale vale  $U_0$  nello strato fra due piani paralleli e  $U_1$  al suo esterno, oppure quando  $U_0$  e  $U_1$  sono i valori iniziali della temperatura all'interno e all'esterno di un cilindro circolare.

Graffi (Bologna).

**Gormley, P. G. and M. Kennedy:** Diffusion from a stream flowing through a cylindrical tube. Proc. Irish Acad., A 52, 163—169 (1949).

Die Diffusion von Kondensationskernen in einem durch ein Rohr vom Radius  $a$  strömendem Gas wird behandelt. Unter Vernachlässigung von  $\partial^2 \psi / \partial \xi^2$  ergibt sich für den Partialdruck  $\psi$  der Kerne die Differentialgleichung

$$\partial^2 \psi / \partial r^2 + r^{-1} \partial \psi / \partial r - \kappa (a^2 - r^2) \partial \psi / \partial \xi = 0,$$

in welcher  $\kappa$  eine zum Diffusionskoeffizienten umgekehrt proportionale Konstante,  $r$  die radiale und  $\xi$  die achsiale Koordinate bedeutet. Die Lösung soll zur experimentellen Bestimmung des Diffusionskoeffizienten dienen. Da die Kondensationskerne an den Wänden zerstört werden, ist  $\psi = 0$  für  $r = a$ . Durch Integration der Differentialgleichung unter dieser Randbedingung wird das Verhältnis  $n/n_0$  der Teilchenzahl  $n$  in der Entfernung  $\xi$  zur Zahl der Teilchen  $n_0$  beim Eintritt für  $\xi = 0$  als Funktion von  $h = \xi / \kappa a^4$  bestimmt.

W. Glaser (Wien).

## Elektrodynamik:

• **Bauer, Ed.:** L'électromagnétisme hier et aujourd'hui. Paris: Albin Michel 1949. 532 p. avec 14 fig. 450 francs.

**Valatin, Jean G.:** La polarisation circulaire et l'opérateur rotationnel du champ de Maxwell. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 110—112 (1948).

Neuartige Darstellung des Maxwellfeldes ebener, zirkularpolarisierter Wellen in Form eines Operatorenkalküls unter Verwendung des Drehoperators und eines neudefinierten Operators, dessen Eigenwerte den Bedingungen  $iE = \pm H$  entsprechen ( $E$  und  $H$  sind die elektrische und magnetische Feldstärke in der Lichtwelle).

F. Sauter (Göttingen).

**Baudot, J.:** Sur la forme matricielle des équations de Maxwell. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1622—1624 (1947).

**Jahn, Helmut und Hans Kopfermann:** Zur Theorie der Radialschwingungen der Elektronen in einer Elektronenschleuder. Ann. Physik, VI. F. 6, 305—320 (1939).

Die Arbeit behandelt die Theorie der endlichen Radialschwingungen im Betatron, wobei insbesondere das Problem der Dämpfung und der Abwanderung der Umkehrpunkte von der Kathode eingehender untersucht wird. Die theoretischen Ergebnisse werden an Hand der Daten des Siemens 6 MeV Betatrons illustriert.

Touschek (Glasgow).

**Aigrain, Pierre R. and Everard M. Williams:** Synthesis of  $n$ -reactance networks for desired transient response. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 597—600 (1949).

The present paper deals with the problem of synthesizing a network with  $n$ -reactances and an associated necessary number of resistances which will have a transient response most nearly equal, in the least square sense, to a desired transient response when excited with some particular input voltage or current impulse. A method is

derived for this synthesis in the cases for which the Laplace transform of the input impuls contains no poles or one pole at  $s = 0$ . The significance of this method with relation to synthesis techniques based on steady-state considerations is discussed. As an example of the application of the method described in the paper it is desired to find circuits with a transient response to the delta-impulse which is most nearly the Bessel function of first kind and zero order. *Gran Olsson (Trondheim).*

● **Goldman, S.:** Transformation calculus and electrical transients. London: Constable and Co., Ltd. 1949. 439 p. 30s. net., illustrated.

● **Bremmer, H.:** Terrestrial radio waves: Theory of propagation. New York and Amsterdam: Elsevier Publishing Co., Inc.; London: Cleaver-Hume Press, Ltd. 1949. X, 343 p. 36s.

**Margolin, S. D.:** Verluste infolge von Wirbelströmen beim magnetischen Skin-Effekt im Blätterstahl. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 665—667 (1949). [Russisch].

**Stejnšleifer, V. B.:** Die Erscheinungen in elektromagnetischen Resonatoren in der Nähe von Punkten des Zusammenfallens der Eigenfrequenzen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 669—672 (1949) [Russisch].

### Relativitätstheorie:

**Drukey, D. L.:** Radiation from a uniformly accelerated charge. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 543—544 (1949).

Verf. zeigt, daß die Strahlung eines Elektrons, das gleichförmig beschleunigt ist (im Sinne Hills, dies. Zbl. 33, 40) mit der Beschleunigung  $a$ , nicht, wie eine weitverbreitete, auf Lorentz, Pauli und Born zurückgehende Ansicht meint, Null ist, sondern ganz normal  $2e^2 a^2/3c^3$ . — Dies schränkt die Brauchbarkeit der von Hill angegebenen Methode, die Felder gleichförmig beschleunigter Teilchen durch konforme Transformation zu gewinnen, stark ein, da sich zeigt, daß die Strahlungslosigkeit bei Hill durch das Auftreten eines räumlich und der Ladung nach gespiegelten Teilchens hervorgerufen wird. *Bauer (München).*

**Finzi, Bruno:** Il campo elettromagnetico nello spazio-tempo. Rend. Sem. mat., Torino 8, 127—144 (1949).

Le concezioni relativistiche della Meccanica e del campo elettromagnetico, sono esposti, in questa conferenza, in maniera molto chiara ed elegante. *Graffi.*

**Prunier, F.:** Quelques observations et expériences nouvelles et leurs conséquences pour les théories de la physique. Arch. Sci., Genève 1, 7—160 (1948).

Die ausführliche, sehr druckfehlerreiche Arbeit will einige neue Aspekte zwischen den üblichen Formeln des elektrodynamischen Feldes, der Wellenmechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie geben, und zwar durch Aufzeigen einiger mathematischer Analogien zwischen den betreffenden Grundgleichungen. Doch wird dem mit der Materie einigermaßen vertrauten Leser recht schwer, den Ausführungen des Verf. zu folgen. So spielen z. B. in der Arbeit die Beziehungen  $(\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = 0$  und  $[\mathfrak{A} \mathfrak{C}] = \mathfrak{B} \varphi$  eine grundlegende Rolle, die nach Verf. für das elektromagnetische Feld einer geradlinig beschleunigt bewegten Punktladung gelten sollten, von denen aber nur die erste gilt. ( $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{B}$  sind dabei die elektrischen Feldvektoren,  $\mathfrak{A}$  und  $\varphi$  die Potentiale.) Durch diese und ähnliche Unstimmigkeiten verlieren die Ausführungen des Verf. ihre Überzeugungskraft. *F. Sauter (Göttingen).*

● **Mandelker, Jakob:** Principles of a new energy mechanics. New York: Philosophical Library 1949. VIII, 73 p.

Théorie basée 1) comme la Relativité, sur l'invariance de l'expression  $s^2 = \sum x^2 - c^2 t^2$ ; 2) comme la théorie classique, sur l'invariance de l'intervalle de temps  $t$ ; 3) sur l'isotropie, mais non l'invariance, de la vitesse de la lumière dans le vide,  $c$ . Examen des conséquences de ces hypothèses. *Costa de Beauregard.*



## Atomphysik.

### Quantenmechanik:

• **Mattauch, Josef und Arnold Flammersfeld:** Isotopenbericht. Tabellarische Übersicht der Eigenschaften der Atomkerne, soweit bis Ende 1948 bekannt. (Sonderheft der Zeitschr. f. Naturforsch.). Tübingen: Verlag der Zeitschr. f. Naturforsch. 1949. 243 S.

**Finkelstein, R. J.:** On the quantization of a unitary field theory. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1079—1087 (1949).

Es wird untersucht, wie eine unitäre Feldtheorie zu quantisieren ist, in der also die Teilchen klassisch nicht als Singularitäten im Felde erscheinen, sondern als Stellen, in deren Umgebung die Feldenergie stark konzentriert ist. Nachdem Verf. allgemein die bekannten Vertauschungsrelationen zwischen den Impuls- und Drehimpulskomponenten des Feldes unter Benutzung des Energieimpulsensors aus dem Ansatz der kanonischen Vertauschungsrelationen (sowohl nach der Einstein-Bose- wie nach der Fermi-Dirac-Statistik) hergeleitet hat, wird insbesondere untersucht, wie sich aus dem Feld heraus ein Operator für die Observable „Ort eines Teilchens“ definieren läßt und wie seine Vertauschungsrelationen aussehen. — Mit  $G_\alpha$  als Energie-Impulsvektor und  $M_{\alpha\beta}$  als Drehimpulskomponenten (als Feldoperatoren) des Feldes und  $G \equiv G_\alpha G_\alpha$  wird die Größe  $T = i G^{\frac{1}{2}} \tau$  eingeführt, wobei  $\tau$  diejenige Feldzeit ist, die als Koordinate desjenigen Lorentzsystems vorkommt, in dem die Erwartungswerte der  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) verschwinden, und mit Hilfe von  $T$  dann die Ortsoperatoren definiert: (1)  $X_\nu = G^{-1} (G_\mu M_{\mu\nu} + G_\nu T)$ . Diese  $X_\nu$  sind die Lösungen der Gleichungen  $M_{\mu\nu} = G_\mu X_\nu - G_\nu X_\mu + m_{\mu\nu}$  mit  $G_\mu m_{\mu\nu} = 0$ , d. h.  $m_{i4} = 0$  in dem Koordinatensystem, in dem  $G_i = 0$ .  $m_{\mu\nu}$  entspricht also dem Spin der Teilchen. — Die Vertauschungsrelationen nehmen dann die Gestalt

$$(2) \quad [G_\alpha, X_\beta] = -i \hbar (g_{\alpha\beta} - G_\alpha G_\beta G^{-1}), \quad [X_\alpha, X_\beta] = i \hbar G^{-1} M_{\alpha\beta}$$

an, eine ähnliche Form wie die bei der Quantisierung von Raum und Zeit erhaltenen Relationen [H. S. Synder, *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 38—41 (1947)]. Die in (2) eingehende Länge ist aber die Comptonwellenlänge des Teilchens. — Weiterhin diskutiert Verf. Operatoren für die Masse und Ladung der Teilchen.

G. Ludwig (Berlin).

**Viguier, Gabriel:** Enchafnement et quantification: Équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique linéaire. *Rev. sci., Paris 86*, 519—522 (1948).

Die Schrödingersche Wellengleichung, die man im Falle des harmonischen linearen Planckschen Oszillators in die Gestalt

$$\frac{d^2 H_k}{dq^2} - 2q \frac{dH_k}{dq} + (\lambda - 1) H_k = 0$$

bringen kann [mit Hermiteischen Polynomen  $H_k$  vom Grad  $k$  (in  $q$ ) als bekannten Lösungen], transformiert Verf. gemäß der Substitution  $\tau = \frac{1}{H_k} \frac{dH_k}{dq}$  in die Riccati'sche Differentialgleichung  $d\tau/dq + \tau^2 - 2q\tau + \lambda - 1 = 0$ . Auf diese Weise kann das Studium der Energieniveaus des Problems auf die Untersuchung der kanonischen Formen einer Riccati'schen Differentialgleichung zurückgeführt werden. *M. Pinl.*

**Langer, R. E.:** On the wave equation with small quantum numbers. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1573—1578 (1949).

Das durch die Wentzel-Kramers-Brillouin-Methode gelieferte Lösungssystem einer eindimensionalen Wellengleichung stellt im wesentlichen eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der Planckschen Konstanten dar und bedeutet eine um so bessere Näherung an das richtige Lösungssystem, je größer der Eigenwert (d. i. die Energie) ist. Dieser Lösungsmethode stellt nun Verf. eine Näherungsmethode gegen-

über, bei der die Entwicklungen ebenfalls nach steigenden Potenzen von  $\hbar$  fortschreiten, bei der aber auch die Energie als klein und erst der Quotient  $E/\hbar = \nu$  als endliche Größe betrachtet wird. *F. Sauter* (Göttingen).

**Bodiu, Georges:** Renforcement des relations d'incertitude en statistique quantique par l'introduction d'un coefficient complexe de corrélation. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 540—542 (1949).

Sind  $A$  und  $B$  zwei lineare hermitesche Operatoren mit den Streuungsquadraten  $\sigma_A^2$  und  $\sigma_B^2$ , wobei  $\sigma_A^2 = (A - \bar{A})^2$  ist, und bedeutet  $[A, B]_+$  den Antikommutator,  $[A, B]_-$  den Kommutator der beiden Operatoren  $A$  und  $B$ , so gilt, wie gezeigt wird, die Beziehung

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \sqrt{[A - \bar{A}, B - \bar{B}]_+^2 + [A, B]_-^2}.$$

*F. Sauter* (Göttingen).

**Breit, G. and B. T. Darling:** Note on the calculation of angular distributions in resonance reactions. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 402—405 (1947).

Proof of the following theorems: (I) A statistical mixture without correlation and with equal probabilities of states having definite projections of two uncoupled spins along an axis is also a statistical mixture in the same sense of states corresponding to compounded spins with definite projections along the same axis. (II) Two angular momenta  $l, s$  are compounded to give a resultant  $j$ . Let  $P(j, m_j; m_l)$  be the probability of  $l$  having a projection  $m_l$  along the  $z$ -axis for a state in which the absolute value of the resultant is  $j$ , and its projection on the  $z$ -axis is  $m_j$ . The theorem states that  $\sum m_j P(j, m_j; m_l) = (2j + 1)/(2l + 1)$  independently of the value of  $m_l$ . — The first theorem is a special case of a theorem proved by J. v. Neumann (Mathematische Grundlagen der Quantentheorie, Berlin 1932, S. 183; dies. Zbl. 5, 91). For the proof of theorem (II) the notion and the general system of Wigner's book are employed (E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Braunschweig 1931, dies. Zbl. 1, 374).

*M. Pinl* (Dacca).

**Snyder, James N. and W. H. Furry:** A note on perturbation theory as applied to collision stimulated processes. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 359—362 (1949).

Calcul de l'altération du taux de désintégration spontanée d'une particule par un choc (exp: choc d'un méson contre un nucléon). Une probabilité quantique figure à côté de la probabilité classique, due à ce que l'énergie peut n'être pas conservée dans la collision, et seulement l'être dans le processus global. La méthode des perturbations doit être revue et spécialement adaptée à ce problème, suivant les indications détaillées données par les auteurs. *O. Costa de Beauregard* (Paris).

**Broch, Einar Klaumann:** A note on the polarization of scattered electrons. Arch. Math. Naturv., Oslo 49, Nr. 4, 119—126 (1947).

Die Theorie sagt voraus, daß ein Strahl gestreuter Elektronen polarisiert sein muß und daß sich diese Polarisation bei einer zweiten Streuung bemerkbar machen müßte. Indessen ist ein solcher Effekt trotz mehrfacher Versuche nicht gefunden worden. Zur Erklärung dieser Diskrepanz vermutet Verf., daß die Elektronen depolarisiert werden durch viele Ablenkungen um kleine Winkel, die sie bei dem Streuvorgang zusätzlich erfahren zu der einen starken Ablenkung, die nach der Theorie die Polarisation schafft. — Um diese Vermutung zu erhärten, untersucht Verf. die Polarisationsänderung, die durch sukzessive Reflexionen an Ebenen eintritt, längs denen eine Potentialdiskontinuität vorliegt, und findet auch, daß durch Reflexion an vielen solchen statistisch verteilten Ebenen Depolarisation eintreten kann.

*Kockel* (Leipzig).

**Koppe, Heinz:** Das magnetische Moment des Elektrons. *Z. Naturforsch.* **3a**, 124—125 (1948).

Es wird gezeigt, daß die nichtlineare Natur des Gleichungssystems der Quantenelektrodynamik Abweichungen vom Diracschen Wert des magnetischen Moments des Elektrons erwarten läßt. Diese Abweichung wird mit Hilfe der Heisenberg-Eulerschen Verallgemeinerung der Diracschen Löchertheorie abgeschätzt. Die Divergenz des Resultats macht eine genaue Bestimmung unmöglich, läßt aber Korrekturen bis zu 10% erwarten.

*Touschek* (Glasgow).

**Bertein, F.:** Théories non linéaires du champ électromagnétique. *Rev. sci.*, Paris **86**, 349—356 (1948).

Verf. gibt eine Einführung in die Born-Infeldsche Theorie [Born, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **7**, 155—265 (1937); dies. Zbl. **18**, 183], diskutiert ihre Schwierigkeiten und geht auch kurz auf verwandte Vorstellungen ein.

*Höhler* (Berlin).

**Thibaud, J.:** Behaviour of a particle of very small mass in a magnetic field. *Nature*, London **162**, 329 (1948).

Verf. zeigt in Verschärfung seiner vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. **33**, 41), daß das magnetische Moment extrem-relativistischer Teilchen mit klassischen Experimenten nachweisbar ist, sobald  $\eta = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg \sqrt[3]{4\pi}$  ist.

*Bauer* (München).

**Green, H. S.:** On the self-energies and cross-sections of orthodox quantum mechanics. *Proc. R. Soc., London, A* **197**, 73—89 (1949).

Nachdem schon verschiedene Modifikationen der gegenwärtigen („orthodoxen“) Quantentheorie der Felder vorgeschlagen sind, die sie konvergent machen sollen, fragt sich Verf., ob nicht bloß die Technik der üblichen Störungsrechnung unzulänglich sei. Das Problem stellt sich, ohne daß die physikalischen Grundlagen verändert werden, wesentlich günstiger bei Benutzung der Dichtematrix-Methode des Verf., bei der die Besetzungsdichte  $\rho$  der Zustände als Observable betrachtet und ihre Veränderung mit der Zeit berechnet wird.  $\rho$  entwickelt sich durch eine Folge von unitären Transformationen aus einem  $\rho_0$ , d. h. es ist asymptotisch

$$P = e^{U_1/i\hbar} \cdot e^{U_2/i\hbar} \dots \rho_0 \dots e^{-U_2/i\hbar} \cdot e^{-U_1/i\hbar}.$$

Die Dichtematrix bleibt also auf jeder Stufe normiert, und ihre Diagonalelemente, die Besetzungswahrscheinlichkeiten darstellen, können nie divergieren. Diese neuartige Störungstheorie wird durch Ausführung mehrerer Stufen erläutert; aus einem anhangsweise durchgeführten Beispiel ergibt sich, daß sie viel schneller konvergiert als die gewöhnliche Methode. Für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Selbstenergien werden die allgemeinen Formeln in 1. bzw. 2. Näherung angegeben. Zur Durchführung der zunächst ganz allgemein gehaltenen Theorie wird dann die Feldtheorie der Dichtematrix und ihre zweite Quantelung entwickelt und damit die oben angeführte Matrix  $U_1$  für die Wechselwirkung von Elektronen und Lichtquanten ausgerechnet. Der damit berechnete Wirkungsquerschnitt konvergiert (wie er muß), während die transversale Selbstenergie divergiert. Dieses Ergebnis der „orthodoxen“ Theorie ist also nicht eine Folge der unzulänglichen Störungsrechnung. Es könnte durch Einführung von Diracs Lichtquanten negativer Energie behoben werden.

*Wessel* (Dayton, Ohio).

**Feynman, Richard P.:** Relativistic cut-off for quantum electrodynamics. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. **74**, 1430—1438 (1948).

Der „cut-off“ wird dadurch bewerkstelligt, daß man Integrale mit  $d\mathbf{k}/k$  über den Raum der Wellenzahlen ( $k$ ) der Feldoszillatoren umschreibt in vierdimensional invariante Integrale mit  $2d\omega d\mathbf{k} \cdot \delta(\omega^2 - k^2)$ , in denen  $\omega$  eine Frequenz darstellt, und dann die  $\delta$ -Funktion ähnlich wie Bopp ersetzt durch

$$g(\omega^2 - k^2) = \int_0^\infty [\delta(\omega^2 - k^2) - \delta(\omega^2 - k^2 - \lambda^2)] G(\lambda) d\lambda$$

mit einer Funktion  $G(\lambda)$ , die erst für  $\lambda \geq 137 mc/\hbar$  erhebliche Werte annimmt



und im übrigen nur der Bedingung  $\int_0^{\infty} G(\lambda) d\lambda = 1$  unterliegt. Mit dieser Vorschrift werden einige Prozesse bzw. Zustände berechnet, in denen es sich nur um Emission und Absorption virtueller Quanten handelt, nämlich die Selbstenergie eines freien Elektrons, die strahlungslose Streuung in einem Potential und die Linienverschiebung für ein gebundenes Elektron. Die Resultate sind im Einklang mit denen von Bethe, Weißkopf und Schwinger auch ohne eine bestimmte Wahl von  $G(\lambda)$ , da diese Funktion nur in die sonst divergenten Terme eingeht. Als ein Effekt, bei dem die Wahl von  $G(\lambda)$  meßbare Folgen haben sollte, wird die Møller-Wechselwirkung zwischen Elektronen besprochen. Die Vakuumpolarisation wird nicht durch das vorliegende Verfahren endlich gemacht. Man müßte eine entsprechende Prozedur im Impulsraum der Elektronen vornehmen, womit man auf einen Vorschlag von Wataghin [Z. Physik 88, 92 (1934); dies. Zbl. 8, 380] zurückkäme. — Eine Berichtigung der Gleichung (19) findet sich in der Arbeit des Verf. in Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 769—789 (1949) auf S. 777. Wessel (Dayton, Ohio).

**Belinfante, Frederik J.:** The interaction representation of the Proca field. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 66—80 (1949).

L.'A examine les difficultés de l'application à la théorie du méson du formalisme de la théorie supermultitemporelle de Tomonaga et Schwinger, en développant une théorie de la représentation d'interaction pour le cas des mésons vectoriels neutres en interaction avec le quadrivecteur densité-courant des particules de Dirac. En particulier on montre que la formulation selon Schwinger de l'équation de Schroedinger généralisée dans la représentation d'interaction avec l'interaction non scalaire de la théorie du méson n'est correcte que si on se limite pour les surfaces  $\sigma$  à des plans perpendiculaires à la direction du temps. On peut alors obtenir les relations de commutation puis les équations du champ dans la représentation d'interaction. On en déduit une analyse de la représentation du vide, l'absence de mésons pouvant se formuler par une condition simple qui serait sans signification en électrodynamique quantique. La méthode de perturbation de Schwinger convenablement généralisée permet de retrouver également l'énergie d'interaction entre particules sous une forme qui redonne l'interaction de Møller pour une masse tendant vers 0. On doit remarquer que toutes les propriétés électromagnétiques de la matière peuvent se retrouver en considérant des champs de mésons dont la masse tend vers zéro en accord avec la théorie de L. de Broglie. G. Petiau (Paris).

**Petiau, Gérard:** L'introduction de coordonnées supplémentaires et la réduction de nombre des constantes d'interaction dans la théorie de la particule de spin  $\hbar/2\pi$  et  $2\hbar/2\pi$  (gravitation). Disqu. math. physic., Bucuresti 6, 235—241 (1948).

Verf. erweitert den Möllerschen Kunstgriff, durch Einführung einer überzähligen, rein formellen Koordinate die skalare und vektorielle Kemmergleichung zusammenzufassen, auf Wellengleichungen für Teilchen vom Spin  $2\hbar$ . Wie im Falle des Spin  $\hbar$  gibt es dann weniger mit den Invarianzforderungen verträgliche Wechselwirkungsterme. Eine genauere Untersuchung der méthode de fusion in ihrem Verhältnis zum strukturellen Aufbau der Darstellungen der Drehgruppe läßt die physikalische Berechtigung möglicher Verallgemeinerungen des Möllerschen Kunstgriffes fragwürdig erscheinen, wenn man nicht von allgemeineren Gesichtspunkten ausgeht, wie es z. B. in der Theorie von Bopp geschieht. Bauer (München).

**Bethe, H. A.:** Theory of the effective range in nuclear scattering. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 38—50 (1949).

Die Arbeit enthält eine vereinfachte Ableitung der Schwingerschen Beziehung  $k \cot \delta = -1/a + \frac{1}{2}k^2 r_0$  zwischen der Phase  $\delta$ , der Streulänge  $a$ , der effektiven Reichweite der Kernkräfte  $r_0$  und der Wellenzahl  $k$  im Schwerpunktsystem. Die Theorie erlaubt einen direkten Vergleich der Proton-Proton- und Neutron-Proton-Phasen ohne explizite Annahme eines bestimmten Potentialverlaufs. Die aus

Proton-Proton- und Neutron-Proton-Singulett-Streuung folgenden Kernkräfte sind etwas verschieden.

*Touschek (Glasgow).*

**Wolfenstein, Lincoln:** Polarization effects in  $n$ - $p$  and  $p$ - $p$  scattering. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 541—542 (1949).*

Die Asymmetrieffekte für doppelte Nukleon-Nukleon-Streuung werden mit Hilfe der phänomenologischen Theorie der Kernkräfte berechnet. Die Entdeckung einer solchen Asymmetrie könnte als direkter Nachweis der Tensorkräfte aufgefaßt werden. Für vollkommen polarisierte Neutronen ergibt sich mit den Rarita-Schwingerschen Werten für die Tensorkräfte eine Maximalasymmetrie von etwa 20% bei 100 MeV und mit Protonen als Streuzentren. Dieser Effekt reduziert sich in Doppelstreuung auf 4% — er ist analog dem als Mottssches Paradoxon bekannten Polarisations-Effekt für Elektronen. Die Asymmetrie für Proton-Proton-Streuung ist kleiner.

*Touschek (Glasgow).*

**Blatt, John M. and J. David Jackson:** On the interpretation of neutron-proton scattering data by the Schwinger variational method. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 18—37 (1949).*

Die Schwingersche Variationsmethode wird auf die Berechnung des Wirkungsquerschnittes (der Streuphase) für Neutron-Proton-Streuung bei Energien unterhalb 10 MeV angewendet. Eine Entwicklung der Streuphase nach Potenzen der Energie zeigt, daß die (formabhängigen) Terme höherer als dritter Ordnung vernachlässigbar sind. Tensorkräfte werden vernachlässigt und die Untersuchung beschränkt sich auf  $S$ -Streuung. Für die Triplet-Reichweite ergibt sich durch Vergleich mit dem Experiment  $r_t = (1,56 \pm 0,13) 10^{-13}$  cm, während sich die Singulett-Reichweite noch nicht abschätzen läßt. Der Einfluß der Form des 'Potentialtopfes' auf die Phase wird durch Vergleich von 4 integrierbaren Ansätzen untersucht und sehr klein befunden.

*Touschek (Glasgow).*

**Potier, Robert:** Sur la théorie du champ nucléaire et les énergies propres des particules élémentaires. *C. r. Acad. Sci., Paris 227, 464—466 (1948).*

In Erweiterung der Untersuchungen von Möller und Rosenfeld, die für die Behandlung der Wechselwirkung der Kernteilchen das pseudoskalare und das vektorielle Mesonfeld benutzen, wird die Hamiltonfunktion für den Fall der gemeinsamen Wirkung eines skalaren, eines pseudoskalaren, eines vektoriellen und eines pseudovektoriellen Mesonfeldes bestimmt. Die Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten werden in Verallgemeinerung derjenigen von Möller und Rosenfeld bestimmt. Für den Fall gleicher Massen der Feldteilchen verschwindet die Hamiltonfunktion identisch. Sind drei der Teilchenmassen groß gegenüber der vierten, so bestimmt diese eine obere Grenze des Wirkungsbereiches der Kernkräfte. Das skalare, das vektorielle und das pseudovektorielle Feld erweisen sich als für die gegebene Theorie unerlässlich. Die Vernachlässigung des pseudoskalaren Feldes reduziert die Zahl der unabhängigen Kopplungskonstanten auf zwei. — Abschließend wird auf ein Analogieverfahren zur Begrenzung der unendlichen Energiewerte der Theorie des elektromagnetischen Feldes hingewiesen.

*Ecker (Bonn).*

**Case, K. M.:** On nucleon moments and the neutron-electron interaction. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1—13 (1949).*

Die magnetischen Momente von Proton und Neutron werden mit Hilfe des Dysonschen kovarianten Formalismus berechnet. Die pseudoskalare Mesontheorie ergibt ein endliches Resultat in der ersten nicht verschwindenden Näherung. Verfügt man über die Kopplungsparameter, so läßt sich das anomale magnetische Moment des Protons festlegen, das des Neutrons ergibt sich dann als viel zu groß. Das Neutron-Elektron-Potential — das auf der Möglichkeit des virtuellen Zerfalls des Neutrons in ein Proton und ein negatives Meson beruht — ergibt sich zu etwa 10 keV.

*Touschek (Glasgow).*



Case, M. M.: Equivalence theorems for meson-nucleon couplings. *Physic. Rev. Lancaster Pa., II. S. 76*, 14—17 (1949).

Es wird gezeigt, daß die pseudoskalaren und pseudovektoriellen Kopplungsglieder der pseudoskalaren Mesontheorie in zweiter Näherung mit Ausnahme zweier Terme äquivalent sind. Einer dieser Terme ist eine zusätzliche Selbstenergie, der andere beeinflußt elektromagnetische Vorgänge im Fall geladener Mesonen. Beide Terme liefern keinen Beitrag zur zweiten Näherung für die Kernkräfte.

*Touschek (Glasgow).*

Hove, L. van: Relativistic terms in the interaction between nucleons in pseudo-scalar and vector meson theory. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1519—1523 (1949).

Die Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Mesonfeld wird nicht als ein statisches Problem, sondern unter Berücksichtigung geschwindigkeitsabhängiger Variablen bis zur zweiten Ordnung berechnet. Das Ergebnis unterscheidet sich wesentlich von den bisherigen Ableitungen. Geht man zur Grenze statischer Wechselwirkungen über, so ergibt sich als Charakteristikum, daß der bekannte Pol 3. Ordnung für  $r = 0$  für den Fall des pseudoskalaren Mesons auf einen Pol zweiter oder erster Ordnung reduziert wird, dagegen bleibt der Pol dritter Ordnung für das Vektormeson erhalten. Für die praktische Anwendung des abgeleiteten Kraftgesetzes auf das Deuteronproblem bestehen noch Schwierigkeiten. *K. H. Höcker.*

Koppe, H.: On the production of mesons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 688 (1949).

Verf. berechnet die Mesonenerzeugung, indem er den Atomkern als schwarzen Körper bezüglich einer Mesonenstrahlung behandelt, der durch Protonenbeschuß aufgeheizt wird. Der Kern ist dabei nicht als entartetes Fermi-Gas aufzufassen, wie in früherer Mitteilung angenommen, da die Anregungsenergie höher ist als die Nullpunktsenergie. Die errechneten relativen Mesonenausbeuten bei verschiedenen Nukleonenenergien passen zu den Messungen von Jones und White [*Bull. Amer. physic. Soc. 24*, 8 (1949)].

*K. H. Höcker (Stuttgart).*

Foldy, Leslie L.: Single production of mesons by gamma-rays near threshold. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 372—374 (1949).

Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von pseudoskalaren und Vektor-Mesonen durch Beschießung von einzelnen Nukleonen mit  $\gamma$ -Quanten wird in Bornscher ( $e^2 g^2$ )-Näherung berechnet. Die Vernachlässigung relativistischer Korrekturen für die Kernteilchen beschränkt den Anwendungsbereich der Rechnung auf Energiewerte in der Nähe der Schwellen-Energie (155 MeV). Die pseudoskalaren Mesonen zeigen eine isotrope Verteilung und ein Anwachsen des Wirkungsquerschnittes mit  $E^{1/2}$  ( $E$  kinetische Energie der Mesonen), die Vektor-Mesonen sind nach einem  $\sin^2 \Theta$ -Gesetz verteilt und die Energie-Abhängigkeit ist  $E^{3/2}$ . Die totalen Wirkungsquerschnitte sind von der Größenordnung  $10^{-29}$  bis  $10^{-28} \text{cm}^2$ . *Touschek.*

Foldy, L. L. and R. E. Marshak: Production of  $\pi$ -mesons in nucleon-nucleon collisions. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1493—1499 (1949).

Verff. versuchen, den Wirkungsquerschnitt für  $\pi$ -Mesonenerzeugung durch Nukleonenstöße bei Energien wenig oberhalb der Schwellenenergie ( $2,9 \cdot 10^8 \text{eV}$ ) zu berechnen. Während dieser Prozeß als einer dritter Ordnung von Morette und Peng berechnet wurde, ist hier ein Ansatz zweiter Ordnung versucht: Der erste Schritt besteht in der Erzeugung eines Mesons durch eines der Nukleonen, der zweite Schritt besteht in der Streuung dieses Nukleons durch das andere. Das ergibt einige formelle Vorteile, aber auch Einschränkungen des Anwendungsbereichs, die durch eine gewisse, bei dem Verfahren zwangsläufige Vernachlässigung der Austauschterme bedingt sind. Es ist der Streuquerschnitt für die symmetrische skalare Theorie in dieser Näherung 0. Das entspricht nicht den Tatsachen, denn hier wird der endliche Wirkungsquerschnitt gerade durch die vernachlässigten Austauschterme bedingt. Dagegen ist in der symmetrischen pseudoskalaren Theorie bei pseudovektorieller Kopplung ein endlicher Wirkungsquerschnitt errechnet, der für eine Energie um  $3 \cdot 10^8 \text{eV}$  bei  $10^{-31} \text{cm}^2$ , um  $6 \cdot 10^8 \text{eV}$  bei  $10^{-29} \text{cm}^2$  liegt. Für die radiale Abhängigkeit wurde ein Yukawa-Potential und ein rechteckiger Potentialtopf



benutzt. Das Ergebnis hängt hiervon nicht ab. Für die Spin- und Ladungsabhängigkeit benutzt man einen phänomenologischen Ansatz  $1 + P_M$  ( $P_M$  Majorana-Operator), durch den nach Serber und Christian (unveröffentlicht) die Neutron-Proton-Streuung bei 90 MeV am besten beschrieben werden kann. Der errechnete Wirkungsquerschnitt ist um einige Größenordnungen kleiner als der von Morette und Peng. Die Differenz liegt in der verschiedenen Behandlung der Austauschterme bei den beiden Arbeiten. Messungen lagen bei Abfassung der Arbeit noch nicht vor.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Lewis, H. W., J. R. Oppenheimer and S. A. Wouthuysen: The multiple production of mesons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73*, 127—140 (1948).

Die Streuung von Neutronen hoher Energie an Nukleonen zeigt, daß geladene Mesonen für die Wechselwirkung wesentlich sein müssen. Die symmetrisierte pseudoskalare oder gemischte Theorie und die Paartheorie ergeben starke Kopplung. Aber selbst dabei ist die Erzeugung von Mesonen nicht trivial. Es gelten folgende Gesichtspunkte: 1. Wenn auch die Nukleonenstöße nach Ausweis der Erfahrung nicht mit einer Übertragung eines großen Drehmoments verbunden sind, so führen sie doch zu Austausch von Spin und Ladung. Der Stoß ruft somit eine Veränderung hervor in dem Mesonenfeld, das die Nukleonen ständig umgibt. Wenn man den Stoß als schnellidealisiert (verglichen mit der Zeit der Mesonenemission), wird man diese Emission mit großer Wahrscheinlichkeit erwarten dürfen. 2. Wenn die Kernfelder sehr intensiv sind, wenn also im stationären Zustand eine große Zahl von virtuellen Mesonen anwesend ist, setzt eine plötzliche Änderung von Spin oder Ladung eine beträchtliche Zahl dieser virtuellen Mesonen in Freiheit. Die Rechnung folgt dem Verfahren von Bloch und Nordsieck. Die Ergebnisse für verschiedene Ansätze lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Eine skalare Theorie gibt energieunabhängige Mehrfacherzeugung mit geringer Multiplizität, da skalare Mesonen keine Spin-Veränderungen an den Nukleonen hervorrufen. Eine symmetrische pseudoskalare und die Paartheorie geben große Mesonenproduktion in Vielfachprozessen. Die Vielfachheit steigt mit  $\sqrt[3]{E}$  ( $E$  = Protonenenergie). Der Wirkungsquerschnitt liegt um  $10^{-26}$  cm<sup>2</sup>. In der skalaren Theorie liegt der Mesonenimpuls senkrecht zur Bewegungsrichtung des Nukleons und ist ungefähr vom Betrage  $\mu c$ , in der pseudoskalaren Theorie hat man eine sphärische Verteilung. — Die Ergebnisse werden angewendet auf das primäre Spektrum der kosmischen Strahlung, das sich von dem Mesonenspektrum unterscheiden muß; Mesonenspektrum  $\sim E^{-2,8}$ , primäres Spektrum  $\sim E^{-2,5}$ . Außerdem werden Rückschlüsse auf den Überschuß an positiven Mesonen gezogen, der auf Meereshöhe eintreten sollte (15%). Er ist in Einklang mit der Erfahrung. K. H. Höcker.

Telegdi, V. L. und M. Verde: ( $\gamma, \alpha$ )-Reaktion des C<sup>12</sup> und das Alphateilchenmodell leichter Kerne. *Helvetica physica Acta 22*, 380—385 (1949).

Tagungsbericht.

Nuyens, Maurice et Carl Grosjean: Sur la diffusion des neutrons thermiques. *C. r. Acad. Sci., Paris 228*, 245—246 (1949).

Es wird die elementare Wahrscheinlichkeit  $\varphi_n(r) dr$  dafür bestimmt, daß ein thermisches Neutron, das von einer punktförmigen Quelle  $O$  ausgesandt worden ist, den  $n$ -ten elastischen Zusammenstoß in einer Distanz zwischen  $r$  und  $r + dr$  vom Punkte  $O$  erfährt. Es wird angenommen, daß das unendlich ausgedehnte, homogene Mittel die Neutronen zerstreut und absorbiert. Jeder Zusammenstoß soll isotrop sein. Bezeichnet man mit  $\lambda_s$  und  $\lambda_c$  die mittleren freien Weglängen für Diffusion und Einfangung und mit  $\lambda$  die gesamte mittlere freie Weglänge ( $\lambda^{-1} = \lambda_s^{-1} + \lambda_c^{-1}$ ), so erhält man

$$\varphi_n(r) dr = \frac{2r dr}{\pi \lambda_s^2} \int_0^\infty (\arctg \lambda u)^n \frac{\sin ru}{u^{n-1}} du \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Für die totale Dichte  $\varrho(r) dV$  ergibt sich durch Summation ein Ausdruck, der mit der von W. Bothe durch Integration einer Integralgleichung angegebenen Lösung übereinstimmt. Zum Schluß wird noch eine von C. Grosjean in Reihenform angegebene Lösung des obigen Problems angeführt. W. Glaser (Wien).

Marshak, R. E.: The variational method for asymptotic neutron densities. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 688—693 (1947).

Die Variationsmethode zur Lösung inhomogener Integralgleichungen wird zur Bestimmung der asymptotischen Neutronendichte angewandt. Es wird gezeigt, daß man bereits bei der einfachsten Wahl der Versuchsfunktion im Variationsansatz in Gestalt einer Konstanten für folgende zwei Fälle sehr gute Näherungen erhält:

1. Für ein halbumendliches, vom Vakuum begrenztes und isotrop streuendes Mittel, das einen konstanten Neutronenstrom aus dem Unendlichen erhält. Der Vergleich mit der strengen Durchrechnung von Milne zeigt, daß das erhaltene Resultat nur um 0,3% vom korrekten Wert abweicht. 2. Für die asymptotische Neutronendichte in einem unendlichen, isotrop streuenden Mittel, das eine vollkommen absorbierende Kugel umgibt und einen sphärisch symmetrischen Neutronenstrom aus dem Unendlichen erhält. Die Ergebnisse zeigen sehr gute Übereinstimmung mit der Methode der Kugelfunktionen, nach der das gleiche Problem vom Autor früher behandelt worden ist. Schließlich werden auch noch die Ansätze für ein unendlich ausgedehntes streuendes Mittel, das einen vollkommen absorbierenden Kern mit anschließendem Luftspalt umgibt, angeführt.

W. Glaser (Wien).

**Behrens, D. J.:** The effect of holes in a reacting material on the passage of neutrons. Proc. phys. Soc., London, Sect. A 62, 607—616 (1949).

Verf. diskutiert die Vergrößerung der Wanderlänge der Neutronen in einem Reaktor für den Fall, daß Hohlräume in ihm vorhanden sind. Dieser Effekt wird durch eine einfache geometrische Funktion der Löchergestalt ausgedrückt. Man findet, daß zusätzlich zu einer Änderung entsprechend dem reziproken Werte der durchschnittlichen Dichte des Reaktormaterials die Wanderlänge auch ein Glied enthält, welches von Größe und Gestalt der Löcher abhängt. Wenn der hydraulische Radius der Löcher, d. i. das Verhältnis von Hohlraumvolumen zu Hohlraumoberfläche, mit der mittleren freien Weglänge der Neutronen im Reaktormaterial vergleichbar ist, wird dieses letzte Glied ausschlaggebend. Es ist daher erwünscht, alle Hohlräume so klein als möglich zu halten, was man wohl von vornherein erwarten wird.

W. Glaser (Wien).

**Rubinson, William:** The equations of radioactive transformation in a neutron flux. J. chem. Physics, Lancaster Pa., 17, 542—547 (1949).

Die bekannten Gleichungen von E. Schweidler für den radioaktiven Zerfall werden für den Fall erweitert, daß die radioaktiven Kerne noch zusätzlich auf künstlichem Wege, z. B. durch Neutronenabsorption, verwandelt werden. Die Gleichungen bleiben formal dieselben.

W. Glaser (Wien).

**Dancoff, S. M. and S. D. Drell:** Electrostatic scattering of neutrons. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 205—212 (1949).

Des expériences récentes de W. W. Havens, I. I. Rabi, L. J. Rainwater [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 634 (1947)] montrent l'existence d'une action d'un champ électrique inhomogène sur les neutrons thermiques. Parmi les causes de cet effet, les AA. examinent la diffusion par les électrons atomiques d'un neutron considéré comme état d'un nucléon de Dirac en interaction avec un champ mésique scalaire. Le couplage entre électron et neutron résulte de l'action électrostatique du champ coulombien de l'électron sur les protons, les paires et les mésons qui selon la théorie quantique des champs existent dans les états virtuels intermédiaires du neutron. Un mélange symétrique de mésons neutres et chargés est considéré dans un calcul de perturbation du troisième ordre admettant un couplage faible entre mésons et nucléons. Les éléments de matrices obtenus permettent une comparaison avec les résultats expérimentaux dans la mesure où l'on peut estimer connue la constante de couplage nucléon-méson  $g^2/4\pi$  et semblent conduire à une dissymétrie de la section efficace de diffusion supérieure à celle observée. Les mêmes difficultés se présentent si l'on remplace le méson scalaire par un méson pseudo-scalaire.

G. Petiau (Paris).

**Bassali, W.:** Probability problems in nuclear chemistry. II. Proc. Irish Acad., A 52, 191—201 (1949).

E. Schrödinger [Proc. Irish Acad., A 51, 1—8 (1945)] hat in seiner Untersuchung über sich selbst erhaltende Kernreaktionen für die Wahrscheinlichkeit  $p(\tau)$ , daß an der Stelle mit dem Lagevektor  $\tau$  eine Kernspaltung stattfindet, die Integral-



gleichung aufgestellt:

$$\lambda p(\mathbf{r}) = \int p(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv',$$

wobei  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  die Lagevektoren für zwei Punkte des Körpers bedeuten und  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv'$  die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß ein an der Stelle  $\mathbf{r}$  erzeugtes Neutron im Volumenelement  $dv'$  einen Spaltungstreffer hervorruft. Der niedrigste Eigenwert  $\lambda$  erlaubt nach Schrödinger die wichtige Unterscheidung: ist  $\lambda < 1/N$  ( $N$  Zahl der bei jeder Spaltung frei gemachten Sekundärneutronen), kann keine anfängliche Spaltung eine Kettenreaktion hervorrufen. Für  $\lambda > 1/N$  besteht für jede anfängliche Kernspaltung eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeit, eine Kettenreaktion auszulösen. Verf. gibt einen plausiblen Ausdruck für den Kern  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  der Integralgleichung. Er gibt eine Lösung mittels der Ritzschen Variationsmethode im Falle „sehr geringer Neutronenabsorption“. Schließlich wird eine genauere Lösung der Integralgleichung angegeben, indem die Neutronenabsorption als Störung betrachtet wird.

W. Glaser (Wien).

Drăganu, Mircea: Sur la généralisation relativiste de l'équation intégral-différentielle de la diffusion des neutrons. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 367—368 (1949).

### Bau der Materie:

Anderson, P. W.: Pressure broadening in the microwave and infra-red regions. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 647—661 (1949).

Zur Berechnung der Druckverbreiterung von Spektrallinien im Ultraroten und Zentimeterwellengebiet wird eine verallgemeinerte Form der Stoßdämpfungstheorie entwickelt. Dabei werden Übergänge zwischen benachbarten Quantenzuständen, welche durch (nichtadiabatische) Stöße verursacht sind, berücksichtigt, die Relativbewegung der Stoßpartner dagegen — wie früher — klassisch behandelt. Anwendungen werden gemacht auf die Eigendruckverbreiterung bei  $\text{NH}_4$ ,  $\text{HCl}$  und  $\text{HCN}$ . Untersuchung einiger Fälle von Fremdgasverbreiterung im Ultrakurzwellengebiet zeigt, daß die alleinige Berücksichtigung der van der Waals'schen Wechselwirkungskräfte hier nicht ausreicht. — Der Zusammenhang zwischen der Stoßdämpfungstheorie der Linienverbreiterung und Debyes Theorie der dielektrischen Verluste wird kurz erörtert.

A. Unsöld (Kiel).

Meixner, J.: Der Begriff der inneren Temperatur in der Dynamik von Gasen mit mehratomigen Molekülen. Z. Physik 124, 129—134 (1947).

Den für Schallabsorption und Wärmeleitung wichtigen gehemmten Energieaustausch zwischen inneren und translatorischen Freiheitsgraden mehratomiger Gasmoleküle behandelt man seit Herzfeld und Rice mittels der Relaxation der „inneren Temperatur“. Verf. weist darauf hin, daß man, rasche Einstellung der Rotation vorausgesetzt, strenggenommen für jedes Schwingungsniveau eine eigene innere Temperatur einzuführen hätte, welche dann durch Relaxationsgleichungen mit sämtlichen übrigen gekoppelt ist. Die Fälle, in denen sich diese Gleichungen auf eine einzige reduzieren, entsprechend dem gewöhnlichen Verfahren, werden herausgestellt.

L. Waldmann (Mainz).

Schytil, Franz: Eine einfache Ableitung einer Formel für die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten. Z. Naturf. 4a, 191—194 (1949).

Durch Abzählung der Eigenschwingungen einer Flüssigkeitsoberfläche infolge der Oberflächenspannung kann man nach Brillouin in Analogie zu den Debyeschen Betrachtungen bei festen Körpern einen Zusammenhang aufstellen zwischen der Oberflächenspannung und der Grenzfrequenz dieser Schwingungen. Eine solche, bereits 1937 von Wen-Po gegebene Formel wird durch Einführung eines „Brechungsindex  $n$ “ verbessert, welcher der Tatsache Rechnung tragen soll, daß eine Flüssigkeit nicht ein ungestörtes Kristallgitter besitzt, sondern gleichsam einem Kristall mit Fehlstellen entspricht. Analoges gilt auch für die Flüssigkeitsoberfläche.



Verf. berechnet sich nun im Anschluß an Lord Rayleigh die Streuwirkung dieser Fehlstellen und damit den gesuchten Brechungsindex, wobei die Größe und Zahl der Fehlstellen aus der Volumänderung der Substanz beim Schmelzen gewonnen wird. Er kommt so zu einer Formel für die Oberflächenspannung, nach der diese annähernd verkehrt proportional der vierten Potenz des Molvolumens der Flüssigkeit wird.

F. Sauter (Göttingen).

**Kohler, Max: Die Volumviskosität in idealen Gasen als gaskinetische Transporterscheinung.** Z. Physik 124, 757—771 (1948).

Der phänomenologische Ansatz für den Reibungstensor eines isotropen Körpers läßt bekanntlich zwei Koeffizienten zu. Der eine, die gewöhnliche Viskosität  $\eta$ , äußert sich bei allen Arten von Strömungen, der andere, die Volumviskosität  $\mu$ , zeigt sich nur bei Kompressions- bzw. Dilatationsvorgängen. Für verdünnte einatomige Gase ist  $\mu = 0$ . Dies hängt, wie zu Beginn der Arbeit gezeigt wird, unmittelbar mit dem Umstand zusammen, daß hier der statische Druck und die Temperatur auf ein und dieselbe Energieform, die translatorische Energie der Moleküle, zurückgehen. Danach läßt sich bereits vermuten, daß bei mehratomigen Gasen, wo noch andere Energieformen hinzukommen,  $\mu \neq 0$  sein wird. Die kinetische Theorie wird durchgeführt für das Modell der harten, rauen Kugeln, welche bei Zusammenstoß Impuls und Drehimpuls in ziemlich einfacher Weise austauschen (es gehen nicht die Winkelvariablen, sondern nur die Winkelgeschwindigkeiten der Kugeln ein). Die näherungsweise Lösung der entsprechenden Boltzmannschen Integralgleichung gelingt im Anschluß an bekannte Verfahren. Es zeigt sich, daß das für die Volumviskosität maßgebende Glied in der Verteilungsfunktion von der Form der gewöhnlichen Maxwellverteilung ist, jedoch mit für Translation und Rotation verschiedenen Temperaturen, deren jede überdies um Beträge proportional  $\text{div } \vec{u}$  (relative Volumänderung pro Zeiteinheit) von der eigentlichen Temperatur abweichen. Verf. findet  $\mu = \eta (1 + \frac{13}{6} x) / 10 x$ , wo  $x = 4J/m\sigma^2$  ( $J$  = Trägheitsmoment,  $m$  = Masse,  $\sigma$  = Durchmesser eines Moleküls). Danach sollte stets  $\mu > 0,37\eta$  sein. — Die gemessene Schallabsorption von Ar bestätigt  $\mu = 0$ ; diejenige von  $N_2$  läßt sich mit einem  $\mu > 0,37\eta$  erklären.

L. Waldmann (Mainz).

**Kohler, Max: Behandlung von Nichtgleichgewichtsvorgängen mit Hilfe eines Extremalprinzips.** Z. Physik 124, 772—789 (1948).

Bei kleinen Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht läßt sich der stationäre Zustand eines Gases durch das Minimum der bei festgehaltenem Wärmestrom und festgehaltener Reibungsspannung zu bildenden Entropieerzeugung pro Zeit- und Volumeinheit charakterisieren. Dieses Minimumprinzip ist äquivalent mit dem von Enskog in seiner Dissertation formulierten Maximumprinzip der Entropievermehrung; der Unterschied liegt in den Nebenbedingungen. Diese Variationsprinzipie können dazu dienen, um mittels des Ritzschen Verfahrens Wärmeleitfähigkeit und Viskosität des Gases zu berechnen. Da diese durch Integrale der Verteilungsfunktion gegeben sind, ist es verständlich, daß die Reihendarstellungen für diese Größen wesentlich rascher konvergieren als die entsprechende Reihe für die Verteilungsfunktion selbst. Je nach Wahl der Minimalfolge ergibt sich die Enskogsche Potenzentwicklung oder die Burnettsche Entwicklung nach verallgemeinerten Laguerre-(Sonine-)Polynomen. — Die gas theoretischen Betrachtungen lassen sich wörtlich in die Theorie der Metallelektronen übertragen.

Ludwig Waldmann.

**Kohler, Max: Reibung in mäßig verdünnten Gasen als Folge verzögerter Einstellung der Energie.** Z. Physik 125, 715—732 (1949).

Die gewöhnliche Reibung einatomiger Gase (Koeffizient  $\eta$ ) läßt sich, indem man die Nichtgleichgewichtskorrektur der Verteilungsfunktion in guter Näherung als quadratische Form der thermischen Geschwindigkeiten ansetzt, auffassen als bedingt durch die endliche Einstellzeit ( $\tau$ ) der Energie der drei translatorischen



Freiheitsgrade. Es ergibt sich  $\eta = p \cdot \tau$  ( $p$  = Druck). Danach ist  $\tau$  um etwa 27% größer als die mittlere Stoßzeit. Im Einklang mit der exakten Theorie und dem Experiment ergibt sich keine Volumreibung. — Diese Deutung der Reibung läßt sich nun zwanglos auf mehratomige Gase übertragen, indem man für die innermolekularen Freiheitsgrade eigene Relaxationszeiten einführt. In diesem Fall ergibt sich eine Volumreibung (Koeffizient  $\mu$ ), welche bei Vernachlässigung der Oszillation und unter Annahme von  $f_r$  vollangeregten Rotationen mit deren Relaxationszeit  $\tau_r$  nach der Formel  $\mu = 2f_r p \tau_r / 3(3 + f_r)$  zusammenhängt. Ebenso wie  $\eta$  ist  $\mu$  druckunabhängig bei fester Temperatur. Die Volumreibung äußert sich in der Schallabsorption. Aus bekannten Werten von letzterer, gemessen an  $N_2$  bzw.  $NH_3$ , ergibt sich  $\tau_r \approx 2$  bzw.  $4\tau$ , was durchaus plausibel erscheint. Werden auch schwach angeregte Schwingungen berücksichtigt, so hat man eine weitere Relaxationszeit einzuführen und erhält einen weiteren additiven Beitrag zur Volumreibung. *Waldmann*.

**Makinson, R. E. B.:** The surface photoelectric effect. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 75, 1908—1911 (1949).

Es wird erneut der Photoeffekt an Metalloberflächen untersucht für den Fall eines beliebigen Potentialverlaufes in der Grenzfläche, und zwar unter der Annahme, daß die Leitungselektronen im Metallinnern als völlig frei angesehen werden können. Unter diesen Bedingungen läßt sich, entsprechend der bisher bereits stets vertretenen Ansicht, der Photostrom, der von Leitungselektronen ganz bestimmten Impulses herführt, darstellen als Produkt aus dem bekannten Durchlässigkeitskoeffizienten durch die Potentialschwelle und aus einer von der Frequenz nur schwach abhängigen Anregungsfunktion. *F. Sauter* (Göttingen).

**Bertaut, Félix:** Signification de la dimension cristalline mesurée d'après la largeur de raie Debye-Scherrer. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 228, 187—189 (1949).

In der Beziehung für die Teilchengrößenverbreiterung

$$(1) \quad B = \int \frac{I(x) dx}{I_{\max}} = \frac{\lambda}{A \cos \vartheta},$$

in welcher  $I(x)$  die Linienintensität als Funktion der Ortskoordinate  $x$ ,  $\lambda$  die Röntgenwellenlänge,  $\vartheta$  den Reflexionswinkel der Linie und  $A$  die effektive Teilchengröße senkrecht zur reflektierenden Netzebene bezeichnen, wurde bisher versucht,  $A$  für bestimmte Teilchenformen zu berechnen. In der vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, daß  $A$  eine von besonderen Annahmen über die Teilchenform unabhängige statistische Bedeutung besitzt. Für den Intensitätsverlauf der Linie ergibt sich

$$(2) \quad I = C \int \frac{[\sin(\pi x \mu \cos \vartheta) / \lambda]^2}{[(\pi x d \cos \vartheta) / \lambda]^2} dm_1 dm_2.$$

Dabei bezeichnen:  $C$  eine Konstante, deren Form hier nicht interessiert,  $\mu$  die Ausdehnung des Kristalls senkrecht zum Flächenelement  $dm_1 dm_2$  der reflektierenden Netzebene mit dem Netzebenenabstand  $d$ . Aus (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad A = \frac{\int \mu^2 dm_1 dm_2}{\int \mu dm_1 dm_2} = \frac{\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}} = \bar{\mu} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{\bar{\mu}^2} \right),$$

wo  $\varepsilon^2$  das mittlere Schwankungsquadrat von  $\mu$  bezeichnet. Die effektive Teilchengröße weicht also von der mittleren Ausdehnung  $\bar{\mu}$  um den den Schwankungen entsprechenden Betrag  $\varepsilon^2 / \bar{\mu}^2$  ab. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

**Saksena, Bishambhar Dayal and Hari Narain:** Raman and infrared spectra of  $\beta$ -quartz. *Proc. Indian Acad. Sci.*, A 30, 128—139 (1949).

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Waldmeier, M.:** Einführung in die Astrophysik. Basel: Verlag Birkhäuser 1949. sfr. 47.50.



**König, Arthur:** Ein neues Verfahren zur Ableitung von Planetenörtern aus photographischen Himmelsaufnahmen im Anschluß an zwei Anhaltsterne. *Astron. Nachr.* 277, 264—270 (1949).

Bei der Bestimmung von Planetoidenörtern aus photographischen Aufnahmen durch Ausmessung der Platten im Anschluß an Anhaltsterne werden Formeln verwendet, in denen die relativen sphärischen Koordinaten  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  gegen den Plattenmittelpunkt (Tangentialpunkt) in Potenzreihen nach den tangentialen Koordinaten  $X$ ,  $Y$  entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen der Deklination  $D$  des Tangentialpunkts. Verf. gelingt eine wesentliche Vereinfachung der Formeln, indem er statt  $D$  die Deklination  $\delta = D + \Delta\delta$  des Gestirns einführt. Dabei verschwindet in der Entwicklung von  $\Delta\delta$  das quadratische Glied. Vernachlässigt man ferner die Glieder 3. Ordnung generell, was in der Praxis der Planetoidenbeobachtung immer erlaubt ist, so nimmt das Formelsystem eine sehr einfache Gestalt an. Verf. führt nach dem verbesserten Verfahren die Interpolationsmethode für den Anschluß an zwei Anhaltsterne durch (was bei Verwendung der neuen Yale- und AG-Kataloge ausreicht) und bringt Tafeln zur weiteren Abkürzung der Rechnung.

*K. Stumpff* (Vogelsang üb. Seesen).

**Kaiser, F.:** Eine weitere raschfördernde Variante der Gaußschen Gleichung in der Bahnbestimmung. *Astron. Nachr.* 277, 255—258 (1949).

In einer früheren Arbeit [*Astron. Nachr.* 228, 121—132 (1926)] hat Verf. gezeigt, daß man die Gleichung 8. Grades des Bahnbestimmungsproblems,

$$r^8 - \mu^2 r^6 + 2l\mu \cos q r^3 - l^2 = 0,$$

wo  $\mu$ ,  $l$ ,  $q$  aus Beobachtungsdaten bekannt oder ableitbar sind, durch Einführung eines Hilfswinkels so transformieren kann, daß ihre Auflösung in 22—23 Rechenzeilen gelingt, während die klassischen Lösungsmethoden (Gauß, Tietjen) 40 bis 50 Zeilen erfordern. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. eine weitere Verbesserung dieses Verfahrens an, die in 17—20 Zeilen zum Ziele führt. Eine der älteren Arbeit beigegebene Hilfstafel kann auch hier benutzt werden. Zwei Rechenbeispiele erläutern die praktische Ausführung.

*K. Stumpff* (Vogelsang üb. Seesen).

**Kurth, Rudolf:** Über Sternsysteme zeitlich oder räumlich veränderlicher Dichte. *Z. Astrophys.* 26, 100—136 (1949).

Es wird gezeigt, daß die von Chandrasekhar und Schürer angegebenen zeitabhängigen Potentialfunktionen, die durch einfache Koordinaten- und Zeittransformationen aus stationären hervorgehen, nur bei räumlich konstanter Dichte die Poissonsche Gleichung erfüllen. Ferner wird gezeigt, wie für zeitunabhängige Geschwindigkeitsverteilungen von der Form  $f = f(E_1, E_2)$  [ $E_1$  = Energieintegral,  $E_2$  = Impulsintegral] die Poissonsche Gleichung durch Reihenentwicklung integriert werden kann. [Dem Verf. ist dabei entgangen, daß die bisher in der Dynamik von Sternsystemen betrachtete Verteilungsfunktion  $f(E_1 - 2k_1 E_2 + k_2 E_2^2)$  die Poissonsche Gleichung für endliche Sternsysteme nicht zu erfüllen vermag. Das eigentliche Problem besteht darin, Verteilungsfunktionen zu finden, die den beobachteten entsprechen und die Poissonsche Gleichung erfüllen. Ref.] *W. Fricke*.

**Bruggenate, P. ten:** Zur Gestalt von Spiralnebeln. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl., math.-physik.-chem. Abt.* 1948, 1—7 (1949).

Es wird gezeigt, wie im Felde einer zeitlich variablen Zentralkraft und einer superponierten zeitlich variablen elastischen Kraft die Sterne Spiralbahnen beschreiben. Sofern die Spiralbahnen einem im Raume festen Punkt entspringen, entsteht als Trajektorie der Bahnen ein Spiralarm. Das Verhältnis von der Zentralmasse  $M_0$  zu der Masse  $M_s$ , welche die elastische Kraft erzeugt, bestimmt die Windungszahl des Armes und gibt an, ob Umkehrungen des Windungssinnes eines Arms möglich sind. Die Theorie wird auf den Spiralnebel M 33 angewendet. *Fricke*.



**Weizsäcker, Carl Friedrich von:** Die Rotation kosmischer Gasmassen. Z. Naturforsch. 3a, 524—539 (1948).

An Hand eines zweidimensionalen, rotationssymmetrischen Modells wird der Einfluß der Turbulenzreibung auf die Bewegungen in einer rotierenden Masse untersucht. Die Turbulenzreibung löst die Masse in einen Kern und eine entweichende Hülle auf. An vorgegebenen Dichteverteilungen wird der zeitliche Ablauf des Auflösungsprozesses studiert; in gewissen Fällen können Ringbildungen in der Hülle eintreten. In dreidimensionalen Modellen wird die qualitative Übereinstimmung der Prozesse mit denen in zweidimensionalen festgestellt. Die beobachtete Verteilung der Rotationsgeschwindigkeit und der Masse im Andromeda-Nebel wird auf Grund der Wirkung von Turbulenzreibung erklärt. *W. Fricke.*

**Lambrecht, H.:** Zur Theorie der kosmischen Kurzwellenstrahlung. Astron. Nachr. 277, 223—228 (1949).

Wenn man nach Reber sowie Henyey und Keenan die Radiofrequenzstrahlung der Milchstraße auf frei-frei-Übergänge von Elektronen in den Feldern von Protonen im interstellaren Raum zurückführen will, so ist ein Zusammenhang zwischen den Intensitäten der Radiofrequenzstrahlung und der  $H_\alpha$ -Strahlung des interstellaren Gases zu erwarten. Dieser wird quantentheoretisch berechnet. Die Beobachtungen ergeben zu schwaches und ungleichförmig verteiltes  $H_\alpha$ -Leuchten. — Zur Deutung der Radio-Intensitäten bei  $\lambda$  10 bis 15 m müßte weiterhin im interstellaren Raum eine Elektronentemperatur von wenigstens 100 000° K angenommen werden. Verf. diskutiert einige weitere Folgerungen aus dieser Annahme. — Insgesamt sprechen z. Z. die vorliegenden Beobachtungen nicht für die „interstellare“ Theorie der galaktischen Radiofrequenzstrahlung. *A. Unsöld (Kiel).*

**Biermann, Ludwig:** Die Innentemperaturen der überdichten Zwerge und das Auftreten von Bose-Entartung. Z. Naturforsch. 3a, 481—485 (1948).

Für die Beurteilung des physikalischen Zustandes „überdichter Zwergsterne“, insbesondere im Hinblick auf das Auftreten von Entartung der Atomkerne und von Kernprozessen, ist es wichtig, die Innentemperaturen dieser Sterne zu kennen. Die Untersuchung der Temperaturverhältnisse der zuerst bekannten überdichten Zwerge, für die etwa der Begleiter des Sirius als Prototyp gelten mag, führte zu Innentemperaturen von der Ordnung  $10^7$  Grad. Bei überdichten Sternen geringerer Leuchtkraft ( $< 10^{-4}$  derjenigen der Sonne) ändern sich, wie Verf. zeigt, die Verhältnisse erheblich. Es ergeben sich für sie Innentemperaturen von der Ordnung  $10^6$  Grad. Diese verhältnismäßig niedrigen Temperaturen im Verein mit den außerordentlich hohen Dichten der überdichten Zwerge haben nicht nur die Entartung der freien Elektronen, sondern auch die der leichtesten Atomkerne zur Folge. *H. Vogt (Heidelberg).*

**Smith, P. D. P.:** A difficulty in using  $mk^{\frac{1}{2}}$  as a residual charge to explain stellar magnetism. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 690 (1949).

Mariani zeigte (dies. Zbl. 29, 191), daß eine elektrische Ladung vom Betrage  $n \cdot k^{\frac{1}{2}}$ , die mit allen Massen verbunden ist, die Magnetfelder rotierender Sterne erklären kann. Die Schwierigkeit dabei liegt darin, daß die elektrostatischen Abstoßungskräfte die Gravitationskräfte übertreffen würden. Eine andere Interpretation derselben Gleichungen, die leicht gefunden werden kann, führt, statt zu Marianis Ergebnis, einfach zum Energiesatz. *G. Thiessen (Hamburg).*

**Sălceanu, Constantin:** Champ magnétique produit par la rotation d'une masse gravitationnelle douée d'une charge électrique de volume. C. r. Acad. Sci., Paris 27, 624—626 (1948).

Für das Verhältnis  $P/U$  zwischen magnetischem und mechanischem Moment einer rotierenden Massenkugel wird aus Dimensionsbetrachtungen  $Q/M$  gesetzt, wo  $Q$  eine elektrische Raumladung und  $M$  die Masse der Kugel bedeutet. Für die Erde ergibt sich eine Raumladung  $Q = 1,32 \cdot 10^{12}$  El. magn. E. ( $= 2 \cdot 10^8 \cdot$  Oberflächenladung der Erde). Die Formel gilt auch für das rotierende Elektron.

*G. Thiessen (Hamburg).*



**Kourganoff, Vladimir:** Une solution du problème de Milne par la méthode variationnelle, appliquée à un développement exponentiel de la fonction source. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 895—897 (1948).

Die Berechnung der Ergiebigkeit  $B(\tau)$  als Funktion der optischen Tiefe  $\tau$  wird für die „graue“ Atmosphäre (Absorptionskoeffizient unabhängig von der Wellenlänge) im Strahlungsgleichgewicht nach einer Variationsmethode durchgeführt. Als verfügbar werden die Koeffizienten  $Q, a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \dots$  in dem Ansatz ( $\pi F$  bedeutet den konstanten Strahlungsstrom)

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F [Q + \tau + a_1 e^{-\beta_1 \tau} + a_2 e^{-\beta_2 \tau} + \dots]$$

betrachtet. Die numerische Rechnung wird mit einem oder zwei Exponentialgliedern durchgeführt und einerseits mit früheren Näherungslösungen, andererseits der exakten Lösung von C. Mark verglichen. A. Unsöld (Kiel).

**Kourganoff, Vladimir et Raymond Michard:** Nouvelles solutions variationnelles du problème de Milne. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1020—1022 (1948).

Die Überlegungen der vorangehenden Note werden auf den Ansatz

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F (\tau + Q + A_2 K_2(\tau) + A_3 K_3(\tau) + \dots + A_n K_n(\tau))$$

angewandt, d. h. die Exponentialfunktionen sind nun durch Integralexponentialfunktionen  $K_n(\tau)$  ersetzt. Die Anschmiegung der neuen Näherungen an die exakte Lösung wird dadurch noch verbessert. A. Unsöld (Kiel).

**McVittie, G. C.:** The equations governing the motion of a perfect gas atmosphere. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 174—195 (1948).

Der Eigenwert der Arbeit liegt in der Wahl besonderer Koordinaten für den Punkt  $P$ , sie sind: sein Vertikalabstand ( $Z$ ) von der Erdoberfläche, der Großkreisbogen ( $S$ ) von einem Festpunkt  $O$  der Erdoberfläche nach der Vertikalen durch  $P$  und der Winkel ( $\theta$ ) zwischen diesem Großkreis und dem Meridian durch  $O$ . Die Vorzüge dieser Koordinaten gegenüber den bisher verwandten kartesischen bzw. Polarkoordinaten werden aufgedeckt. Eine zweite Eigenschaft ist die ausschließliche Verwendung der Zustandsgleichung idealer Gase, so daß das Verhalten tropfbarflüssiger oder fester Körper zur Deutung atmosphärischer Bewegungsvorgänge nicht behandelt wird. — Im ersten Teil werden die Gleichungen der Bewegung, der Kontinuität und des 1. Hauptsatzes in diesen Koordinaten dargestellt und mit ihnen die stationäre horizontale Bewegung beschrieben. Im zweiten Teil wird zunächst eine einfache Drehströmung, dann die kleinräumige, quasiadiabatische, konvergente bzw. divergente Bewegung und eine entsprechende großräumige untersucht. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Komponente der Vertikalgeschwindigkeit zu Null wird und der Wärmeinhalt der Masseneinheit konstant bleibt. — Verf. kommt zu dem Schluß, daß, soweit man hoffen kann, atmosphärische Bewegungen durch jene eines reibungslosen idealen Gases darstellen zu können, auf eine oder beide der Voraussetzungen verzichtet werden muß. In erster Linie wird man das Nullwerden der vertikalen Geschwindigkeitskomponente nicht voraussetzen dürfen. B. Neis (Berlin).

**Golubeva, O. V.:** Über eine Vereinfachung der Gleichungen der Hydrodynamik bei der Erforschung der Oberflächenströmungen in Ozeanen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 453—456 (1948) [Russisch].

**Barber, N. F.:** The behaviour of waves on tidal streams. Proc. R. Soc., London, A **198**, 81—93 (1949).

Die Periodenschwankung einer von einem fernen Sturmherd erzeugten Dünung wird durch den Einfluß der Gezeitenströmung erklärt, indem die von Unna gegebene Untersuchung eines Wellenzuges beim Eintritt in eine stationäre Strömung auf den Eintritt in eine quasistationäre Strömung ausgedehnt wird. Pretsch.